TAVOLE DI SOPRAVVIVENZA

Sia

T_0 n.a. durata aleatoria di vita dalla nascita

Si definisce

Funzione di sopravvivenza $S(t) = P(T_0 > t), \quad t \geq 0$

Si ha

- $S(0) = P(T_0 > 0) = 1$
- $S(t)$ è una funzione non crescente: se $t_1 < t_2$ allora $S(t_1) \geq S(t_2)$
- $\lim_{t \to +\infty} S(t) = 0$

In ambito attuariale la funzione di sopravvivenza è generalmente descritta mediante una **tavola di mortalità** o **tavola di sopravvivenza**.

La tavola di sopravvivenza può essere interpretata come la tabulazione sugli interi di una funzione di sopravvivenza $S(x)$ definita per $x \geq 0$, quindi di tipo continuo;

si definisce età estrema ω tale che $S(\omega - 1) > 0$ ed $S(\omega) = 0$

x	l_x	d_x	q_x
0	100.000	828	0,008280
1	99.172	67	0,000676
2	99.105	42	0,000424
3	99.063	32	0,000323
⋮	⋮	⋮	⋮
109	30	15	0,500000
110	15	15	1,000000
111	0		

Def. $$l_x = l_0\, S(x) \qquad x = 0, 1, \ldots, \omega$$

dove l_0 è detto radice della tavola ed è fissato opportunamente, per esempio $l_0 = 100.000$

l_x esprime il numero atteso di individui in vita all'età x, a partire da una collettività di l_0 neonati, nell'ipotesi che la sopravvivenza sia descritta dalla funzione di sopravvivenza $S(x)$

Def. $$d_x = l_x - l_{x+1} \qquad x = 0, 1, \dots, \omega - 1$$

d_x esprime il numero atteso di decessi nell'intervallo di età $]x, x+1]$

Si definiscono

$$q_x = \frac{d_x}{l_x} = \frac{l_x - l_{x+1}}{l_x}$$

probabilità che un individuo in vita all'età x, deceda entro l'età $x+1$

$$p_x = 1 - q_x = 1 - \frac{d_x}{l_x} = \frac{l_{x+1}}{l_x}$$

probabilità che un individuo in vita all'età x, sia in vita all'età $x+1$

Si definiscono inoltre

$${}_n p_x = \frac{l_{x+n}}{l_x}$$ probabilità che un individuo in vita all'età x, sia in vita all'età $x+n$

$${}_n q_x = 1 - {}_n p_x = \frac{l_x - l_{x+n}}{l_x}$$ probabilità che un individuo in vita all'età x, deceda entro l'età $x+n$

ASSICURAZIONE ELEMENTARE CASO VITA

Assicura ad una testa di età x il capitale unitario, in caso di vita all'età x+h.

Si definisce il valore attuale aleatorio della prestazione assicurata:

$$ {}_hY_x^{(v)} = \begin{cases} v^h & se\, T_x > h \\ 0 & altrimenti \end{cases} $$

Si definisce il valore attuale atteso della prestazione assicurata:

$$ {}_hE_x = E({}_hY_x^{(v)}) = v^h \cdot {}_hp_x $$

Si ha

$$ {}_hE_x = v^h \cdot {}_hp_x = v^h \cdot \frac{l_{x+h}}{l_x} $$

Si definisce la funzione di commutazione: $D_x = v^x \cdot l_x$

Si ha allora

$$ {}_hE_x = v^h \cdot \frac{l_{x+h}}{l_x} = \frac{v^{x+h} \cdot l_{x+h}}{v^x \cdot l_x} = \frac{D_{x+h}}{D_x} $$

ASSICURAZIONE ELEMENTARE CASO MORTE

Assicura ad una testa di età x il capitale unitario alla fine dell'anno di decesso, in caso di decesso tra le età x+h e x+h+1.

Si definisce il valore attuale aleatorio della prestazione assicurata:

$$ {}_{h/1}Y_x^{(d)} = \begin{cases} v^{h+1} & se \;\; h < T_x \le h+1 \\ 0 & altrimenti \end{cases} $$

Si definisce il valore attuale atteso della prestazione assicurata:

$$ {}_{h/1}A_x = E({}_{h/1}Y_x^{(d)}) = v^{h+1} \cdot {}_{h/1}q_x $$

dove $\quad {}_{h/1}q_x = P(h < T_x \le h+1) = \dfrac{l_{x+h} - l_{x+h+1}}{l_x}$

Si definisce la funzione di commutazione: $\quad C_x = v^{x+1}(l_x - l_{x+1})$

Si ha allora $\quad {}_{h/1}A_x = v^{h+1}\, \dfrac{l_{x+h} - l_{x+h+1}}{l_x} = \dfrac{v^{x+h+1}(l_{x+h} - l_{x+h+1})}{v^x \cdot l_x} = \dfrac{C_{x+h}}{D_x}$