**Esame di Metodi Probabilistici e Statistici e Processi Stocastici**
**Anno Accademico 2014/2015, $2^a$ sessione, $1^o$ appello (04/06/2015)**
**Corso di laurea triennale in Ingegneria dell'Informazione**
**Dipartimento di Ingegneria e Architettura**
**Università degli Studi di Trieste**

1) Siano $X$ ed $Y$ variabili aleatorie indipendenti e con legge di Bernoulli di parametro $\frac{2}{3}$, sia la variabile aleatoria $Z = X + Y$ e sia la catena di Markov $\{X_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ a valori in $\{0, 1, 2\}$, avente come legge iniziale la legge di $Z$ e come matrice di transizione la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Calcolare $E[ZX]$ e $Var[Z - 2Y]$.
b) Determinare le densità discrete delle variabili aleatorie $X_0$, $X_1$, $X_2$.
c) Calcolare $E[X_2]$ e $Var[X_1]$.
d) Stabilire se esista una misura di probabilità invariante per la catena di Markov ed in caso affermativo determinarla.

2) Sia $(X, Y)$ un vettore aleatorio continuo con densità uniforme sul triangolo determinato dai punti $(0, 0)$, $(0, 2)$ e $(4, 0)$.
a) Determinare le densità delle variabili aleatorie $X$ ed $Y$ e stabilire se $X$ ed $Y$ siano indipendenti.
b) Calcolare $E[X]$ e $E[Y]$.
c) Calcolare $P\left(Y > \frac{X}{2}\right)$.

3) Sia $(X_1, ..., X_n)$ un campione casuale estratto da una legge uniforme sull'intervallo $(\alpha - \beta, \alpha + \beta)$, dove $\alpha \in \mathbf{R}$, $\beta \in \mathbf{R}^+$.
a) Verificare che $E[X_1]$ dipende solo da $\alpha$, mentre $Var[X_1]$ dipende solo da $\beta$.
b) Determinare con il metodo dei momenti gli stimatori $\widehat{T_1}$ e $\widehat{T_2}$ di $E[X_1]\,(\alpha)$ e $Var[X_1](\beta)$ rispettivamente.
c) Calcolare la distorsione dello stimatore $\widehat{T_2}$.