Esame di Metodi Probabilistici e Statistici e Processi Stocastici
Anno Accademico 2014/2015, 2^a sessione, 2^o appello (22/06/2015)
Corso di laurea triennale in Ingegneria dell'Informazione
Dipartimento di Ingegneria e Architettura
Università degli Studi di Trieste

1) Siano X ed Y variabili aleatorie indipendenti: la prima con legge di Bernoulli di parametro $\frac{3}{4}$; la seconda con legge di Bernoulli di parametro $\frac{2}{3}$.
a) Calcolare $E\left[X^2Y\right]$ e $Var[X-3Y]$.
b) Calcolare $P\left(Y \leq 2X\right)$.
c) Determinare la densità discreta della variabile aleatoria $Z = X + Y$.
d) Calcolare $E\left[Z^2\right]$ e $Var[4Z - Y]$.

2) Siano X ed Y variabili aleatorie indipendenti: la prima con legge uniforme continua su $(1, 3)$; la seconda avente la densità di probabilità

$$f_Y(y) = \frac{k}{y} 1_{(1,2)}(y),\ \forall y \in \mathbf{R},$$

dove $k \in \mathbf{R}^+$.
a) Calcolare k.
b) Calcolare $E[X + 2Y]$ e $Var\,[Y]$. Dedurre che $\ln 2 > \frac{2}{3}$.
c) Calcolare $P\left(\{X \geq 2\} \cup \{Y \leq \sqrt{e}\}\right)$.

3) Sia $(X_1, ..., X_n)$ un campione casuale estratto da una legge avente densità data dalla funzione

$$f(x) = (\theta + 1)x^\theta 1_{(0,1)}(x),\ \forall x \in \mathbf{R},$$

dove $\theta \in (-1, +\infty)$.
a) Calcolare $E\left[X_1\right]$ e $Var[X_1]$.
b) Determinare con il metodo dei momenti uno stimatore $\widehat{\Theta_1}$ di θ.
c) Determinare lo stimatore $\widehat{\Theta_2}$ di massima verosimiglianza di θ.