

## RISERVE MATEMATICHE

Con riferimento ad un contratto assicurativo su una testa di  $x$  stipulato in 0 e di durata  $n$  anni, si definisce

**Riserva matematica prospettiva in  $h$**

$$V_h^{(p)} = \text{Prest}[h, n] - \text{Premi}[h, n] \quad h = 0, \dots, n$$

dove

$\text{Prest}[h, n]$  è il valore attuariale in  $h$  delle prestazioni dell'assicuratore nell'intervallo  $[h, n]$

$\text{Premi}[h, n]$  è il valore attuariale in  $h$  dei premi relativi all'intervallo  $[h, n]$

Sia

$$R_h = \text{Premi}[0, h] - \text{Prest}[0, h] \quad h = 0, \dots, n$$

con

$\text{Premi}[0, h]$  il valore attuariale in 0 dei premi relativi all'intervallo  $[0, h]$

$\text{Prest}[0, h]$  il valore attuariale in 0 delle prestazioni dell'assicuratore nell'intervallo  $[0, h]$

Si definisce la **Riserva matematica prospettiva** in  $h$ ,  $V_h^{(r)}$ , tale che

$$R_h = {}_hE_x V_h^{(r)}$$

Si ha

$$V_h^{(r)} = \frac{1}{{}_hE_x} R_h = \frac{1}{{}_hE_x} (\text{Premi}[0, h] - \text{Prest}[0, h]) \quad h = 0, \dots, n$$

Se le valutazioni sono fatte usando la base tecnica del primo ordine si ha

$$V_h^{(r)} = V_h^{(p)}$$

Osservazioni:

- la valutazione della riserva matematica in  $h$  è fatta prima del pagamento degli importi esigibili in  $h$  in via anticipata e dopo il pagamento degli importi esigibili in  $h$  via posticipata (riserva terminale)
- nel caso di premio unico, la valutazione è fatta in 0 dopo il pagamento del premio (riserva iniziale):

$$V_{0^+}^{(p)} = U \quad \text{con} \quad U \quad \text{premio unico}$$

## RISERVE MATEMATICHE - ASSICURAZIONI CASO MORTE

### Assicurazione a vita intera a premio unico

Premio unico: 
$$U = A_x = \frac{M_x}{D_x}$$

Riserva matematica prospettiva: 
$$V_h^{(p)} = A_{x+h} = \frac{M_{x+h}}{D_{x+h}} \quad h = 0, \dots, \omega - x - 1$$

Riserva matematica retrospettiva: 
$$V_h^{(r)} = \frac{1}{{}_hE_x} (U - {}_hA_x) \quad h = 0, \dots, \omega - x - 1$$

con 
$${}_hE_x = \frac{D_{x+h}}{D_x} \quad {}_hA_x = \frac{M_x - M_{x+h}}{D_x}$$

Si ha 
$$V_h^{(r)} = \frac{1}{{}_hE_x} (U - {}_hA_x) = \frac{D_x}{D_{x+h}} \left( \frac{M_x}{D_x} - \frac{M_x - M_{x+h}}{D_x} \right) = \frac{M_{x+h}}{D_{x+h}} = V_h^{(p)}$$

## Assicurazione a vita intera a premio annuo

Premio annuo  $P$  pagato per  $t$  anni:

$$A_x = P \ddot{a}_{x:t|} \quad \Leftrightarrow \quad P = \frac{A_x}{\ddot{a}_{x:t|}} = \frac{\frac{M_x}{D_x}}{\frac{N_x - N_{x+t}}{D_x}} = \frac{M_x}{N_x - N_{x+t}}$$

Riserva matematica prospettiva: 
$$V_h^{(p)} = \begin{cases} A_{x+h} - P \ddot{a}_{x+h:t-h|} & h = 0, \dots, t-1 \\ A_{x+h} & h = t, \dots, \omega - x - 1 \end{cases}$$

con 
$$A_{x+h} = \frac{M_{x+h}}{D_{x+h}} \quad \text{e} \quad \ddot{a}_{x+h:t-h|} = \frac{N_{x+h} - N_{x+t}}{D_{x+h}}$$

Riserva matematica retrospettiva: 
$$V_h^{(r)} = \begin{cases} \frac{1}{{}_h E_x} \left( P \ddot{a}_{x:h|} - {}_h A_x \right) & h = 0, \dots, t-1 \\ \frac{1}{{}_h E_x} \left( P \ddot{a}_{x:t|} - {}_h A_x \right) & h = t, \dots, \omega - x - 1 \end{cases}$$

con 
$$\frac{1}{{}_h E_x} = \frac{D_x}{D_{x+h}} \quad \ddot{a}_{x:h|} = \frac{N_x - N_{x+h}}{D_x} \quad \text{e} \quad {}_h A_x = \frac{M_x - M_{x+h}}{D_x}$$

## Assicurazione temporanea caso morte a premio unico

Premio unico: 
$$U = {}_nA_x = \frac{M_x - M_{x+n}}{D_x}$$

Riserva matematica prospettiva: 
$$V_h^{(p)} = {}_{n-h}A_{x+h} = \frac{M_{x+h} - M_{x+n}}{D_{x+h}} \quad h = 0, \dots, n$$

Riserva matematica retrospettiva: 
$$V_h^{(r)} = \frac{1}{{}_hE_x} (U - {}_hA_x) \quad h = 0, \dots, n$$

con 
$${}_hE_x = \frac{D_{x+h}}{D_x} \quad {}_hA_x = \frac{M_x - M_{x+h}}{D_x}$$

Si ha 
$$V_h^{(r)} = \frac{1}{{}_hE_x} (U - {}_hA_x) = \frac{D_x}{D_{x+h}} \left( \frac{M_x - M_{x+n}}{D_x} - \frac{M_x - M_{x+h}}{D_x} \right) = \frac{M_{x+h} - M_{x+n}}{D_{x+h}} = V_h^{(p)}$$

## Assicurazione temporanea caso morte a premio annuo

Premio annuo  $P$  pagato per  $t = n$  anni:

$${}_t A_x = P \ddot{a}_{x:t|} \quad \Leftrightarrow \quad P = \frac{{}_t A_x}{\ddot{a}_{x:t|}} = \frac{\frac{M_x - M_{x+t}}{D_x}}{\frac{N_x - N_{x+t}}{D_x}} = \frac{M_x - M_{x+t}}{N_x - N_{x+t}}$$

Riserva matematica prospettiva:

$$V_h^{(p)} = {}_{t-h} A_{x+h} - P \ddot{a}_{x+h:t-h|} = \frac{M_{x+h} - M_{x+t}}{D_{x+h}} - P \frac{N_{x+h} - N_{x+t}}{D_{x+h}} \quad h = 0, \dots, t-1$$

Riserva matematica retrospettiva:

$$V_h^{(r)} = \frac{1}{{}_h E_x} \left( P \ddot{a}_{x:h|} - {}_h A_x \right) \quad h = 0, \dots, t-1$$

Si ha

$$V_h^{(r)} = \frac{D_x}{D_{x+h}} \left( P \frac{N_x - N_{x+h}}{D_x} - \frac{M_x - M_{x+h}}{D_x} \right)$$

## RISERVE MATEMATICHE - ASSICURAZIONI CASO VITA

### Assicurazione di capitale differito a premio unico

Premio unico: 
$$U = {}_nE_x = \frac{D_{x+n}}{D_x}$$

Riserva matematica prospettiva: 
$$V_h^{(p)} = {}_{n-h}E_{x+h} = \frac{D_{x+n}}{D_{x+h}} \quad h = 0, \dots, n$$

Riserva matematica retrospettiva: 
$$V_h^{(r)} = \frac{1}{{}_hE_x} U = \frac{D_x}{D_{x+h}} U \quad h = 0, \dots, n$$

Si ha

$$V_h^{(r)} = \frac{1}{{}_hE_x} U = \frac{{}_nE_x}{{}_hE_x} = \frac{D_{x+n}}{D_{x+h}} = V_h^{(p)}$$

## Assicurazione di capitale differito a premio annuo

Premio annuo  $P$  pagato per  $t = n$  anni:

$${}_tE_x = P \ddot{a}_{x:t|} \quad \Leftrightarrow \quad P = \frac{{}_tE_x}{\ddot{a}_{x:t|}} = \frac{\frac{D_{x+t}}{D_x}}{\frac{N_x - N_{x+t}}{D_x}} = \frac{D_{x+t}}{N_x - N_{x+t}}$$

Riserva matematica prospettiva:

$$V_h^{(p)} = {}_{t-h}E_{x+h} - P \ddot{a}_{x+h:t-h|} = \frac{D_{x+t}}{D_{x+h}} - P \frac{N_{x+h} - N_{x+t}}{D_{x+h}} \quad h = 0, \dots, t-1$$

Riserva matematica retrospettiva:

$$V_h^{(r)} = \frac{1}{{}_hE_x} \left( P \ddot{a}_{x:h|} \right) \quad h = 0, \dots, t-1$$

Si ha 
$$V_h^{(r)} = \frac{D_x}{D_{x+h}} \left( P \frac{N_x - N_{x+h}}{D_x} \right)$$

## Assicurazione di rendita vitalizia differita a premio unico

Premio unico: 
$$U = {}_t/\ddot{a}_x = \frac{N_{x+t}}{D_x}$$

Riserva matematica prospettiva: 
$$V_h^{(p)} = \begin{cases} {}_{t-h}/\ddot{a}_{x+h} & h = 0, \dots, t-1 \\ \ddot{a}_{x+h} & h = t, \dots, \omega - x - 1 \end{cases}$$

con 
$${}_{t-h}/\ddot{a}_{x+h} = \frac{N_{x+t}}{D_{x+h}} \quad \ddot{a}_{x+h} = \frac{N_{x+h}}{D_{x+h}}$$

Riserva matematica retrospettiva: 
$$V_h^{(r)} = \begin{cases} \frac{1}{h} E_x U & h = 0, \dots, t \\ \frac{1}{h} E_x (U - {}_{t/h-t}\ddot{a}_x) & h = t+1, \dots, \omega - x - 1 \end{cases}$$

con 
$${}_{t/h-t}\ddot{a}_x = \sum_{j=0}^{h-t-1} {}_{t+j}E_x = \frac{\sum_{j=0}^{h-t-1} D_{x+t+j}}{D_x} = \frac{N_{x+t} - N_{x+h}}{D_x}$$

## Assicurazione di rendita vitalizia differita a premio annuo

Premio annuo  $P$  pagato per  $t = n$  anni:

$${}_{t|}\ddot{a}_x = P \ddot{a}_{x:t|} \quad \Leftrightarrow \quad P = \frac{{}_{t|}\ddot{a}_x}{\ddot{a}_{x:t|}} = \frac{\frac{N_{x+t}}{D_x}}{\frac{N_x - N_{x+t}}{D_x}} = \frac{N_{x+t}}{N_x - N_{x+t}}$$

Riserva matematica prospettiva: 
$$V_h^{(p)} = \begin{cases} {}_{t-h|}\ddot{a}_{x+h} - P \ddot{a}_{x+h:t-h|} & h = 0, \dots, t-1 \\ \ddot{a}_{x+h} & h = t, \dots, \omega - x - 1 \end{cases}$$

con 
$${}_{t-h|}\ddot{a}_{x+h} = \frac{N_{x+t}}{D_{x+h}} \quad \ddot{a}_{x+h:t-h|} = \frac{N_{x+h} - N_{x+t}}{D_{x+h}} \quad \ddot{a}_{x+h} = \frac{N_{x+h}}{D_{x+h}}$$

Riserva matematica retrospettiva: 
$$V_h^{(r)} = \begin{cases} \frac{1}{h} E_x P \ddot{a}_{x:h|} & h = 1, \dots, t \\ \frac{1}{h} E_x \left( P \ddot{a}_{x:t|} - {}_{t/h-t}\ddot{a}_x \right) & h = t+1, \dots, \omega - x - 1 \end{cases}$$

con 
$$\ddot{a}_{x:h|} = \frac{N_x - N_{x+h}}{D_x} \quad {}_{t/h-t}\ddot{a}_x = \frac{N_{x+t} - N_{x+h}}{D_x} ; \quad V_0^{(r)} = 0$$