MODELLI TARIFFARI E STIME DEI PARAMETRI

1. Introduzione

Nelle assicurazioni contro i danni, per determinare il premio da applicare ad un certo rischio ci si basa generalmente sull'osservazione statistica di un insieme di rischi "analoghi". Più precisamente, si giudicano "analoghi" i rischi ai quali è ragionevole applicare lo stesso premio (o lo stesso tasso di premio) e l'osservazione dei sinistri da essi riportati in un certo periodo di tempo fornisce un'utile base statistica per la valutazione del premio equo. In molti casi, si pensi ad esempio alla copertura contro l'incendio o all'assicurazione R.C.A., è ben difficile giudicare analoghi tutti i rischi che possono venire assicurati ed è tantomeno ragionevole pensare di applicare ad essi lo stesso premio.

Consideriamo in qualche dettaglio l'assicurazione delle autovetture contro la responsabilità civile. Osservando il parco delle vetture circolanti ci si rende conto che sono "più rischiose" le vetture più potenti, rispetto quelle di minore cilindrata oppure quelle circolanti in determinate zone con maggiore densità di traffico, piuttosto di quelle circolanti in zone rurali o comunque scarsamente trafficate; inoltre anche l'anzianità del veicolo potrebbe essere un elemento discriminante. Pensando poi al conducente è senza dubbio rilevante la sua abilità nella guida, che può essere collegata all'età nonché all'anzianità di patente. Anche il fatto poi che più conducenti si possano alternare alla guida dello stesso veicolo potrebbe costituire un'aggravante per il rischio. Come si vede, un gran numero di elementi più o meno osservabili (ad esempio la percorrenza annua è senza dubbio interessante ma difficilmente rilevabile) contribuiscono a descrivere o, potremmo anche meglio dire, *caratterizzare* il rischio. Una collettività di rischi andrà allora opportunamente suddivisa in sottocollettività di rischi da giudicare analoghi. Per fare questo si individuano gli elementi osservabili e discriminanti i rischi, che verranno detti *variabili tariffarie*, e si assegnano alla stessa sottocollettività i rischi caratterizzati dalle stesse determinazioni assunte da queste variabili.

Ai rischi appartenenti ad una stessa sottocollettività (*classe tariffaria*) verrà applicato lo stesso premio, che potrà pertanto venire espresso in funzione delle determinazioni assunte dalle variabili tariffarie. Nella funzione o, come si dice in questo contesto, nel modello tariffario compaiono un certo numero di parametri che vengono usualmente stimati a partire da un insieme di dati osservati. Una volta stimati i parametri, le determinazioni assunte dalle variabili tariffarie in un certo rischio consentono di individuare il premio da applicare a quel rischio: avremo così realizzata una *tariffa.* Si comprende come sia cruciale la scelta del modello tariffario, anche perché le sole indicazioni che si possono avere al riguardo derivano dalle nostre conoscenze ed intuizioni sul legame esistente tra la variabile dipendente (il premio) e le variabili tariffarie. In molti casi si ricorrerà a dei modelli, per così dire, tradizionali: il modello moltiplicativo ed il modello additivo. Questi, da una parte portano ad una semplificazione del problema, in quanto al numero di parametri da stimare, ma dall'altra racchiudono in sé delle implicazioni e quindi dei vincoli dei quali è opportuno tenere conto.

2. I modelli tariffari moltiplicativo ed additivo

Tradizionalmente i primi modelli tariffari che sono stati impiegati sono il modello tariffario moltiplicativo ed il modello tariffario additivo. Nel presente paragrafo verranno descritti questi due modelli nel caso in cui si considerino due sole variabili tariffarie; naturalmente tutto quanto è estendibile al caso in cui le variabili tariffarie siano più di due.

Siano X e Y i n.a. variabili tariffarie, aventi un numero finito di determinazioni, rispettivamente $x_1,...,x_I$ e $y_1,...,y_J$. L'esigenza che le determinazioni delle variabili tariffarie siano in numero finito è legata, come vedremo più avanti, ai metodi di stima che possono venire utilizzati per i parametri. Tuttavia, variabili le cui determinazioni non sono finite possono venire comunque considerate, sostituendo alle determinazioni opportuni raggruppamenti delle stesse in un numero finito di classi. Nell'assicurazione R.C.A. X e Y potrebbero essere rispettivamente la variabile che descrive il tipo di guidatore o la classe di rischio e la variabile zona di circolazione. Il portafoglio degli assicurati può venire ripartito in IJ classi caratterizzate dalle determinazioni assunte dalle due variabili tariffarie. Indichiamo con (i,j) la classe degli assicurati aventi determinazione x_i per la variabile X e determinazione y_j per la variabile Y.[1]

Supponiamo che il portafoglio sia stato osservato per un certo periodo di tempo T. Indichiamo con n_{ij} il numero di "osservazioni statistiche" e con s_{ij} il "danno osservato"

[1] L'estensione ad un modello che preveda ad esempio k variabili tariffarie $X_1,...,X_k$ è immediata: basta che le determinazioni di ciascuna di esse siano ripartite in un numero finito di classi. Se indichiamo ad esempio con I_j il numero di classi relativo alla variabile X_j, la collettività degli assicurati risulterà ripartita in $I_1 \cdot I_2 \cdot ... \cdot I_k$ classi tariffarie.

nella classe (i,j). A seconda del tipo di rilevazione statistica disponibile n_{ij} e s_{ij} potranno assumere di volta in volta diversi significati, per cui se indichiamo con $p_{ij} = \frac{s_{ij}}{n_{ij}}$ si ha:

(a) se n_{ij} è il numero delle polizze nella classe (i,j) e
s_{ij} è il numero di sinistri denunciati dagli assicurati della classe (i,j),
p_{ij} è allora il numero medio di sinistri denunciati dagli assicurati della classe (i,j) nel periodo T;

(b) se n_{ij} è il numero di sinistri denunciati dagli assicurati della classe (i,j) e
s_{ij} è il danno totale relativo agli n_{ij} sinistri,
p_{ij} è allora il danno medio per singolo sinistro osservato relativamente ai rischi di classe (i,j);

(c) se n_{ij} è il numero delle polizze nella classe (i,j) e
s_{ij} è il danno totale osservato nel periodo T e relativo alle polizze della classe (i,j),
p_{ij} è allora la quota danni osservata nel periodo T per i rischi della classe (i,j).

Se il periodo di osservazione T è pari ad un anno, nel caso (a) p_{ij} è la frequenza di sinistro osservata e quindi una stima del numero atteso di sinistri per ogni rischio della classe (i,j); nel caso (c) p_{ij}, quota danni osservata, è una stima del premio equo per i rischi appartenenti alla classe (i,j). Per periodi di osservazione di durata diversa da un singolo anno, affinché in ogni classe (i,j) p_{ij} sia ancora una stima della frequenza di sinistro o rispettivamente del premio equo, è necessario riproporzionare per la durata T il numero di rischi osservati n_{ij} in ciascuna classe (i,j), in modo da tenere conto dell'effettiva esposizione di questi rischi. La scelta della durata del periodo di osservazione T è particolarmente delicata, da una parte un periodo di osservazione molto lungo consente di disporre di un numero elevato di osservazioni, dall'altra, osservazioni troppo remote potrebbero essere poco significative se le caratteristiche di rischiosità si sono modificate sensibilmente nel tempo. A tal proposito è importante osservare che i modelli tariffari che tratteremo insegnano a valutare i premi da assegnare alle diverse classi di rischio in base alle osservazioni statistiche disponibili ed in ipotesi di stabilità dei rischi considerati. Fenomeni di trend o anche semplici fenomeni inflativi devono venire trattati separatamente.

Essendo la quota danni una stima del premio equo, si potrebbe pensare di costruire la tariffa direttamente in base alla statistica (c) delle quote danni osservate nelle singole classi tariffarie. Molto spesso però gli usuali modelli tariffari non danno in questo caso risultati soddisfacenti, per cui può essere preferibile applicare i modelli separatamente alle frequenze di sinistro ed ai danni medi osservati ottenendo, rispettivamente, stime del numero atteso di sinistri e del danno atteso per singolo sinistro.

Indichiamo con P_{ijk} il n.a. corrispondente alla k-esima osservazione nella classe (i,j) ed in base al tipo di osservazione statistica disponibile sarà:

(a) P_{ijk} = "numero di sinistri denunciati dal k-esimo assicurato della classe (i,j) nel periodo considerato";

(b) P_{ijk} = "danno relativo al k-esimo sinistro denunciato da un assicurato della classe (i,j) nel periodo considerato";

(c) P_{ijk} = "danno totale relativo al k-esimo rischio della classe (i,j) nel periodo considerato".

Supponendo P_{ijk} ugualmente distribuiti nella classe (i,j) chiamiamo $E(P_{ij})=E(P_{ijk})$ per ogni k. Le rilevazioni p_{ij}, in quanto valori medi osservati, costituiscono una stima di $E(P_{ij})$. Se non si dispone però di un numero sufficientemente elevato di osservazioni nella classe (i,j), p_{ij} è una stima "poco attendibile" per $E(P_{ij})$. In tal caso, per ottenere stime migliori, si adottano modelli tariffari che consentono di utilizzare, nel procedimento di stima, informazioni provenienti da aggregati più ampi rispetto alle sole informazioni relative alla classe (i,j).

Modello moltiplicativo

Si ipotizza

$$E(P_{ij}) = \varphi_i \, \psi_j \qquad \text{con } i=1,...,I \text{ e } j=1,...J;$$

oppure, con una formulazione equivalente

$$E(P_{ij}) = p \, \lambda_i \, \mu_j \qquad (2.1)$$

con i=1,...,I, j=1,...J e p un valore certo che ad esempio nel caso (c) è il premio equo che realizza l'equilibrio per l'intera collettività, cioè il premio che si applicherebbe a ciascun rischio del portafoglio a prescindere dalla classe tariffaria di appartenenza.

Modello additivo

Si ipotizza

$$E(P_{ij}) = \varphi_i + \psi_j \qquad \text{con } i=1,...,I \text{ e } j=1,...J;$$

o in modo equivalente

$$E(P_{ij}) = p \, (\lambda_i + \mu_j) \qquad (2.2)$$

con i=1,...,I, j=1,...J e p che, anche in questo caso, è un valore certo corrispondente nel caso (c) al premio equo per l'intera collettività.[2]

---

[2] L'ipotesi additiva può venire ancora espressa in modo equivalente: $E(P_{ij}) = p + \alpha_i + \beta_j$ (con

L'impiego di questi modelli consente di ridurre la complessità del problema di stima, infatti invece di dover stimare direttamente i valori attesi $E(P_{ij})$ (in tutto IJ) è sufficiente stimare I+J parametri, che vengono anche detti *relatività*. Così facendo però si introducono delle ipotesi semplificatrici che possono essere anche molto forti. Nel primo modello si suppone implicitamente che l'effetto dei fattori tariffari sul rischio sia di tipo moltiplicativo mentre, nel secondo viene ipotizzato un effetto di tipo additivo. Inoltre, in entrambi i modelli si assume che l'effetto di ciascuno dei due fattori sul rischio sia indipendente dalla determinazione assunta dall'altro fattore tariffario, si suppone cioè che sia trascurabile l'influenza combinata (interazione) dei due fattori sul rischio.

Nei modelli (2.1) e (2.2) le relatività sono dei coefficienti associati alle classi tariffarie, che consentono di "adattare" il premio p in modo da ottenere dei premi corrispondenti alle caratteristiche di rischiosità delle diverse classi. Talvolta le relatività vengono definite diversamente e precisamente assumendo p non il premio equo per l'intera collettività ma quello equo per una certa classe. Per esigenze legate ad alcune interpretazioni, che verranno descritte in seguito, ci limitiamo qui a trattare soltanto il primo caso.

Disponendo delle osservazioni p_{ij} il problema della stima dei parametri λ_i (i=1,...,I) e μ_j (j=1,...J) è indeterminato in entrambi i modelli. Nel caso del modello moltiplicativo le stime sono determinate a meno di una costante moltiplicativa mentre nel caso del modello additivo lo sono a meno di una costante additiva. Se indichiamo infatti con $\hat{\lambda}_i$ (i=1,...,I) e $\hat{\mu}_j$ (j=1,...J) un insieme di stime per le relatività allora $\frac{\hat{\lambda}_i}{\alpha}$ con i=1,...,I e $\hat{\mu}_j \cdot \alpha$ con j=1,...J e qualunque sia $\alpha \neq 0$, danno gli stessi valori stimati per $E(P_{ij})$ (con i=1,...,I e j=1,...J) nel caso del modello moltiplicativo; mentre $\hat{\lambda}_i - \alpha$ con i=1,...,I e $\hat{\mu}_j + \alpha$ con j=1,...J e qualunque sia α, danno gli stessi valori stimati per $E(P_{ij})$ (con i=1,...,I e j=1,...J) nel caso del modello additivo. Veniamo ora ad illustrare alcuni dei metodi che sono stati proposti per la stima dei parametri.

3. Il metodo di stima delle "relatività intuitive"

Questo primo metodo è stato introdotto per stimare le relatività nel modello

i=1,...,I e j=1,...,J); nei casi (b) e (c) α_i e β_j hanno dimensione monetaria mentre nelle (2.1) e (2.2) i parametri sono comunque numeri puri.

moltiplicativo.

Definiamo le seguenti quantità:

$$n_{..} = \sum_{i=1}^{I} \sum_{j=1}^{J} n_{ij} \; ;$$

$$p_{..} = \frac{\sum_{i=1}^{I} \sum_{j=1}^{J} p_{ij} n_{ij}}{n_{..}} \; ; \qquad (3.1)$$

$$n_{i.} = \sum_{j=1}^{J} n_{ij} \qquad \text{con } i=1,...,I;$$

$$n_{.j} = \sum_{i=1}^{I} n_{ij} \qquad \text{con } j=1,...,J;$$

$$p_{i.} = \frac{\sum_{j=1}^{J} p_{ij} n_{ij}}{n_{i.}} \qquad \text{con } i=1,...,I; \qquad (3.2)$$

$$p_{.j} = \frac{\sum_{i=1}^{I} p_{ij} n_{ij}}{n_{.j}} \qquad \text{con } j=1,...,J. \qquad (3.3)$$

Dalle (3.1), (3.2) e (3.3) si ottiene la seguente relazione:

$$p_{..}\, n_{..} = \sum_{i=1}^{I} p_{i.}\, n_{i.} = \sum_{j=1}^{J} p_{.j}\, n_{.j} \qquad (3.4)$$

$p_{..}$ è una stima di p in (2.1) e (2.2) e, nel caso (c) è la quota danni osservata sull'intero portafoglio. Nello stesso caso, $p_{i.}$ è la quota danni osservata per i rischi aventi determinazione x_i per la variabile tariffaria X. Analoga interpretazione per $p_{.j}$.

Sia

$$E(P_{ij}) = p\, \lambda_i\, \mu_j \qquad \text{con } i=1,...,I \text{ e } j=1,...J;$$

indichiamo con $\hat{p}_{ij}$ il valore stimato per $E(P_{ij})$, così definito:

$$\hat{p}_{ij} = \hat{p}\, \hat{\lambda}_i\, \hat{\mu}_j \qquad \text{con } i=1,...,I \text{ e } j=1,...J.$$

Consideriamo le seguenti stime:

$$\hat{p} = p_{..}$$

e le relatività intuitive per i parametri λ_i e μ_j

$$\hat{\lambda}_i = \frac{p_{i.}}{p_{..}} \qquad \text{con } i=1,...,I \qquad (3.5)$$

$$\hat{\mu}_j = \frac{p_{.j}}{p_{..}} \qquad \text{con } j=1,...J. \qquad (3.6)$$

Si ottiene allora:

$$\hat{p}_{ij} = p_{..} \frac{p_{i.}}{p_{..}} \frac{p_{.j}}{p_{..}} = \frac{p_{i.}\, p_{.j}}{p_{..}} \qquad \text{con } i=1,...,I \text{ e } j=1,...J.$$

Questo metodo di stima è di immediata interpretazione ma presenta l'inconveniente di essere influenzato dalla distribuzione dei rischi nelle classi. Riprendendo l'esempio dell'assicurazione R.C.A. con le due variabili tariffarie "tipo di conducente o classe di rischio" e "zona di circolazione" si vede che la stima delle relatività per una certa zona di circolazione è influenzata dalla distribuzione per tipo di conducente in quella zona. Infatti, la quota danni $p_{.j}$ osservata nella zona y_j, e quindi la stima $\hat{\mu}_j$, potrebbe indicare una zona ad elevata rischiosità mentre ciò può essere dovuto non alle caratteristiche della zona in sé ma al semplice fatto che vi circolano molti "cattivi" conducenti. Se la distribuzione degli assicurati varia allora sensibilmente nelle diverse zone, le relatività intuitive determinano delle distorsioni nella relazione (ordinamento) di sinistrosità tra le zone stesse. In particolare per un assicurato appartenente ad una classe di rischio elevata e ad una zona in cui circolano molti "cattivi" assicurati, questo fattore di rischio viene di fatto contato due volte. Più precisamente, come vedremo nel prossimo paragrafo, in tale caso il premio medio relativo alla zona non coincide con l'esborso medio osservato; situazione questa indicata dagli attuari come "assenza di bilanciamento".

4. Il problema del bilanciamento

Dopo aver realizzato una tariffa, a partire da un insieme di osservazioni, è interessante verificare che essa soddisfi alcune proprietà. Innanzitutto è bene accertare che gli scostamenti tra i valori osservati p_{ij} e quelli stimati $\hat{p}_{ij}$ non siano troppo sensibili; una seconda esigenza, nota come *bilanciamento*, richiede che per gruppi "numerosi" di assicurati gli esborsi osservati siano uguali agli introiti che si sarebbero ottenuti applicando la tariffa appena stimata.

Siano $\hat{p}_{ij}$ le stime ottenute per $E(P_{ij})$, con i=1,..,I e j=1,...,J; si dirà che il metodo di stima adottato verifica il *bilanciamento sulle righe* se:

$$\sum_{j=1}^{J} \hat{p}_{ij}n_{ij} = \sum_{j=1}^{J} p_{ij}n_{ij} \quad \text{per ogni } i=1,..,I. \qquad (4.1)$$

Se definiamo $\hat{p}_{i.}$ tale che

$$\sum_{j=1}^{J} \hat{p}_{ij}n_{ij} = \hat{p}_{i.}\, n_{i.} \qquad \text{con } i=1,...,I,$$

$\hat{p}_{i.}$ ha il significato di premio medio da applicare agli assicurati con variabile tariffaria $X=x_i$. Sfruttando la (3.2), si ottiene la seguente espressione per la condizione di bilanciamento sulle righe:

$$\hat{p}_{i.}\, n_{i.} = p_{i.}\, n_{i.} \qquad \text{per ogni } i=1,..,I;$$

ovvero:

$$\hat{p}_{i.} = p_{i.} \qquad \text{per ogni } i=1,..,I$$

e quindi la condizione di bilanciamento sulle righe richiede che i premi medi uguaglino gli esborsi medi osservati per gli assicurati aventi la stessa determinazione per la variabile tariffaria X.

Analogamente, diremo che il metodo tariffario verifica il *bilanciamento sulle colonne* se:

$$\sum_{i=1}^{I} \hat{p}_{ij} n_{ij} = \sum_{i=1}^{I} p_{ij} n_{ij} \quad \text{per ogni } j=1,..,J. \qquad (4.2)$$

Se definiamo $\hat{p}_{.j}$ tale che

$$\sum_{i=1}^{I} \hat{p}_{ij} n_{ij} = \hat{p}_{.j}\, n_{.j} \qquad \text{con } j=1,..,J,$$

$\hat{p}_{.j}$ ha il significato di premio medio da applicare agli assicurati con variabile tariffaria $Y=y_j$. Sfruttando la (3.3), si ottiene la seguente espressione per la condizione di bilanciamento sulle colonne:

$$\hat{p}_{.j}\, n_{.j} = p_{.j}\, n_{.j} \qquad \text{per ogni } j=1,..,J;$$

ovvero:

$$\hat{p}_{.j} = p_{.j} \qquad \text{per ogni } j=1,..,J$$

e quindi la condizione di bilanciamento sulle colonne richiede che i premi medi uguaglino gli esborsi medi osservati per gli assicurati aventi la stessa determinazione per la variabile tariffaria Y.

E' interessante introdurre ancora la definizione di bilanciamento globale. Diremo che il metodo tariffario verifica il *bilanciamento globale* se:

$$\sum_{i=1}^{I} \sum_{j=1}^{J} \hat{p}_{ij} n_{ij} = \sum_{i=1}^{I} \sum_{j=1}^{J} p_{ij} n_{ij}. \qquad (4.3)$$

Se definiamo $\hat{p}_{..}$ tale che

$$\sum_{i=1}^{I} \sum_{j=1}^{J} \hat{p}_{ij} n_{ij} = \hat{p}_{..}\, n_{..}$$

$\hat{p}_{..}$ ha il significato di premio medio generale. Sfruttando la (3.1), si ottiene la seguente espressione per la condizione di bilanciamento globale:

$$\hat{p}_{..}\, n_{..} = p_{..}\, n_{..}\ ;$$

ovvero:

$$\hat{p}_{..} = p_{..}$$

per cui la condizione richiede che il premio medio generale coincida con l'esborso medio osservato.

E' interessante notare che la condizione (4.3) può essere così riscritta:

$$\sum_{j=1}^{J} \hat{p}_{.j}\, n_{.j} = \sum_{j=1}^{J} p_{.j}\, n_{.j}$$

e quindi condizione sufficiente affinché il metodo tariffario verifichi il bilanciamento globale è che il metodo verifichi il bilanciamento sulle colonne.

Un'analoga condizione può essere ottenuta con riferimento al bilanciamento sulle righe.

Storicamente nell'assicurazione R.C.A., la prima classificazione dei rischi introdotta è stata quella per "tipo di assicurato" o per "classe di rischio", cioè mediante una variabile che esprimesse le caratteristiche del guidatore in modo tale da individuarne la rischiosità. Indicata con X tale variabile e con $x_1,\ldots,x_I$ le sue determinazioni, ipotizzando il seguente modello tariffario

$$E(P_i) = p\, \lambda_i \qquad \text{con } i=1,\ldots,I$$

dalle osservazioni p_i e n_i (per le classi i=1,...,I) si ottenevano le seguenti stime:

$$\hat{p} = p. \qquad \text{con } p. = \frac{\sum_{i=1}^{I} p_i n_i}{n.} \qquad \text{e } n. = \sum_{i=1}^{I} n_i \,,$$

e le relatività

$$\hat{\lambda}_i = \frac{p_i}{p.} \qquad \text{con } i=1,\ldots,I.$$

Da cui segue:

$$\hat{p}_i = p.\, \frac{p_i}{p.} = p_i. \qquad \text{con } i=1,\ldots,I$$

per cui la tariffa risultava bilanciata sia sulle singole classi di rischio che globalmente in quanto:

$$\sum_{i=1}^{I} \hat{p}_i\, n_i = \sum_{i=1}^{I} p_i\, n_i \,.$$

A questa prima classificazione si tendeva ad aggiungerne, successivamente, una ulteriore per "zona di circolazione" e si poneva quindi il problema di determinare le nuove relatività per le singole zone di circolazione.

Indichiamo con Y la variabile "zona di circolazione", con $y_1,\ldots,y_J$ le sue determinazioni e ipotizziamo il modello tariffario moltiplicativo (2.1). Se si adottano come stime delle relatività λ_i con i=1,...,I e μ_j con j=1,...,J le relatività intuitive (3.5) e (3.6) non è garantito in generale il bilanciamento sulle singole zone. Infatti, con riferimento alla j-esima zona tariffaria si ha:

$$\hat{p}_{.j} = \frac{\sum_{i=1}^{I} \hat{p}_{ij} n_{ij}}{n_{.j}} = \frac{\sum_{i=1}^{I} p_{..}\, \hat{\lambda}_i\, \hat{\mu}_j\, n_{ij}}{n_{.j}} = \frac{\sum_{i=1}^{I} \frac{p_{i.}\; p_{.j}}{p_{..}}\, n_{ij}}{n_{.j}} = p_{.j} \left(\frac{\sum_{i=1}^{I} p_{i.}\, n_{ij}}{p_{..}\, n_{.j}} \right)$$

e ancora:

$$\hat{p}_{.j} = p_{.j} \left(\frac{\sum_{i=1}^{I} p_{i.} \frac{n_{ij}}{n_{.j}} n_{..}}{p_{..} n_{..}} \right) \qquad (4.4)$$

Se $\frac{\sum_{i=1}^{I} p_{i.} n_{ij}}{p_{..} n_{.j}} \neq 1$ la tariffa non verifica il bilanciamento della zona j e quindi neppure il bilanciamento globale è garantito. Confrontando l'espressione in parentesi nella (4.4) con la (3.4) si vede che se la distribuzione degli assicurati nella zona j $\left(\frac{n_{ij}}{n_{.j}},\ i=1,\dots,I\right)$ coincide con la distribuzione marginale degli assicurati sulle classi di rischio $\left(\frac{n_{i.}}{n_{..}},\ i=1,\dots,I\right)$ allora il rapporto è uguale a 1. Altrimenti, si intuisce che se nella zona j si ha una maggiore incidenza di assicurati appartenenti alle classi di rischio peggiori, il rapporto sarà maggiore di 1 altrimenti sarà minore di 1. Nel primo caso il premio medio assegnato ai rischi appartenenti alla j-esima zona sarà maggiore dell'esborso medio osservato nella stessa zona.

Nell'ipotesi particolare di indipendenza tra le distribuzioni degli assicurati nelle classi di rischio e nelle zone di circolazione, essendo:

$$n_{ij} = \frac{n_{i.}\, n_{.j}}{n_{..}} \qquad \text{per ogni } i=1,...I \text{ e per ogni } j=1,...J$$

si ha:

$$\frac{\sum_{i=1}^{I} p_{i.} n_{ij}}{p_{..} n_{.j}} = \frac{\sum_{i=1}^{I} p_{i.} n_{i.} n_{.j}}{p_{..} n_{..} n_{.j}} = \frac{\sum_{i=1}^{I} p_{i.} n_{i.}}{p_{..} n_{..}} = \frac{p_{..} n_{..}}{p_{..} n_{..}} = 1 \qquad \text{per ogni } j=1,...J$$

per cui sono soddisfatte le condizioni di bilanciamento per tutte le zone e quindi anche la condizione di bilanciamento globale. Si può verificare in modo analogo che, sotto questa stessa ipotesi, anche le condizioni di bilanciamento per le classi di rischio sono tutte soddisfatte.

5. Il metodo di stima delle relatività adattate per realizzare il bilanciamento

Abbiamo visto che la classificazione degli assicurati per zone di circolazione veniva molto spesso aggiunta ad una preesistente classificazione per classi di rischio. Per questo motivo era generalmente sentita l'esigenza di utilizzare un metodo di stima delle relatività tale da garantire le condizioni di bilanciamento sulle zone tariffarie. Affinchè ciò sia verificato deve essere

$$\frac{\sum_{i=1}^{I} p_{i\cdot}\, n_{ij}}{p_{\cdot\cdot}\, n_{\cdot j}} = 1 \qquad \text{per ogni } j=1,...J$$

per cui sono state allora introdotte (sempre con riferimento al modello tariffario moltiplicativo (2.1)) le seguenti relatività:

$$\hat{\lambda}_i = \frac{p_{i\cdot}}{p_{\cdot\cdot}} \qquad \text{con } i=1,...,I \text{ e}$$

$$\hat{\mu}_j = \frac{p_{\cdot j}}{p_{\cdot\cdot}} \Bigg/ \frac{\sum_{i=1}^{I} p_{i\cdot}\, n_{ij}}{p_{\cdot\cdot}\, n_{\cdot j}} \qquad \text{con } j=1,...,J.$$

Risulta allora:

$$\hat{p}_{\cdot j} = \sum_{i=1}^{I} \hat{p}_{ij} \frac{n_{ij}}{n_{\cdot j}} = \sum_{i=1}^{I} p_{\cdot\cdot} \frac{p_{i\cdot}}{p_{\cdot\cdot}} \frac{p_{\cdot j}}{p_{\cdot\cdot}} \frac{n_{ij}}{n_{\cdot j}} \Bigg/ \frac{\sum_{i=1}^{I} p_{i\cdot}\, n_{ij}}{p_{\cdot\cdot}\, n_{\cdot j}} =$$

$$= p_{\cdot j} \frac{\sum_{i=1}^{I} p_{i\cdot}\, n_{ij}}{\sum_{i=1}^{I} p_{i\cdot}\, n_{ij}} = p_{\cdot j} \qquad \text{per ogni } j=1,...J$$

e sono quindi soddisfatte le condizioni di bilanciamento per le zone tariffarie, nonchè la condizione di bilanciamento globale. Tuttavia, queste nuove relatività danno luogo a dei premi che non garantiscono più che siano soddisfatte le condizioni di bilanciamento per le classi di rischio, anche se queste condizioni erano inizialmente soddisfatte dalle relatività stimate prima dell'inserimento della variabile tariffaria zona di circolazione. Con riferimento infatti alla i-esima classe di rischio si ha:

$$\hat{p}_{i\cdot} = \frac{\sum_{j=1}^{J} \hat{p}_{ij} n_{ij}}{n_{i\cdot}} = \frac{\sum_{j=1}^{J} p_{\cdot\cdot}\, \hat{\lambda}_i\, \hat{\mu}_j\, n_{ij}}{n_{i\cdot}} = \frac{\sum_{j=1}^{J} p_{\cdot\cdot} \frac{p_{i\cdot}}{p_{\cdot\cdot}} \hat{\mu}_j\, n_{ij}}{n_{i\cdot}} = p_{i\cdot} \left(\sum_{j=1}^{J} \hat{\mu}_j \frac{n_{ij}}{n_{i\cdot}} \right)$$

per cui, se $\sum_{j=1}^{J} \hat{\mu}_j \frac{n_{ij}}{n_{i\cdot}} \neq 1$ la tariffa non verifica il bilanciamento per la i-esima classe di rischio.

In molte applicazioni si è osservato che lo "sbilanciamento", in presenza di relatività adattate, era piuttosto contenuto e quindi, tutto sommato, accettabile. Rimaneva però aperto il problema, se non altro da un punto di vista teorico, di trovare degli aggiustamenti per le relatività tali da realizzare simultaneamente il bilanciamento sia sulle zone che sulle classi di rischio. A tal proposito già Bailey e Simon [1][3] hanno

[3] Nel lavoro citato gli autori considerano un modello tariffario con due variabili tariffarie: X="classe di rischio" e Y="classe di merito"; dove la variabile Y "riassume" l'esperienza ossrvata in quanto al numero di sinistri denunciati. Essendo queste due variabili fortemente correlate, le relatività

osservato che un perfetto aggiustamento dei due insiemi di relatività è difficilmente realizzabile in quanto il bilanciamento per una variabile rende non più bilanciata l'altra e viceversa. Dalle condizioni di bilanciamento (4.1) e (4.2) si ottiene infatti il seguente sistema di equazioni:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{J} \hat{p}_{ij} n_{ij} = \sum_{j=1}^{J} p_{ij} n_{ij} & i=1,\dots,I \\ \sum_{i=1}^{I} \hat{p}_{ij} n_{ij} = \sum_{i=1}^{I} p_{ij} n_{ij} & j=1,\dots,J \end{cases} \tag{5.1}$$

che nel caso del modello moltiplicativo (2.1), stimando preliminarmente p con $\hat{p} = p_{..}$ diventa:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{J} p_{..} \hat{\lambda}_i \hat{\mu}_j n_{ij} = p_{i.} n_{i.} & i=1,\dots,I \\ \sum_{i=1}^{I} p_{..} \hat{\lambda}_i \hat{\mu}_j n_{ij} = p_{.j} n_{.j} & j=1,\dots,J \end{cases}$$

e da cui si ricava:

$$\begin{cases} \hat{\lambda}_i = \dfrac{p_{i.} / p_{..}}{\sum_{j=1}^{J} \hat{\mu}_j \dfrac{n_{ij}}{n_{i.}}} & i=1,\dots,I \qquad (5.2.1) \\ \hat{\mu}_j = \dfrac{p_{.j} / p_{..}}{\sum_{i=1}^{I} \hat{\lambda}_i \dfrac{n_{ij}}{n_{.j}}} & j=1,\dots,J \qquad (5.2.2) \end{cases}$$

Supponiamo ora che un certo insieme di relatività soddisfino il secondo gruppo di equazioni (ad esempio, bilanciamento sulle zone) ma non il primo (ad esempio, bilanciamento sulle classi di rischio). Se si ricercano allora delle nuove relatività che siano soluzione del primo gruppo di equazioni, in modo da garantire il bilanciamento sulle classi di rischio, queste non verificheranno più le equazioni del secondo gruppo, venendo così a mancare il bilanciamento sulle zone tariffarie.

Dopo questa prima introduzione sulle relatività intuitive e sulle esigenze di bilanciamento, veniamo ad illustrare alcuni metodi di stima delle relatività che sono applicabili sia al modello moltiplicativo (2.1) che al modello additivo (2.2).

---

intuitive determinano uno sbilanciamento particolarmente accentuato sulle classi di rischio, da cui l'esigenza di impiegare le relatività adattate per le classi di rischio, oppure di tentare di bilanciare simultaneamente sia sulle classi di rischio che sulle classi di merito.

6. Il metodo di stima dei totali marginali

L'obiettivo, come già anticipato, è quello di realizzare il bilanciamento per tutti i gruppi di assicurati caratterizzati dalla stessa determinazione per una delle variabili tariffarie, ad esempio per ciascun gruppo di assicurati appartenenti ad una stessa classe di rischio, per ogni gruppo di assicurati appartenenti ad una stessa zona e così via per tutte le classi di rischio e per tutte le zone tariffarie. Si devono quindi trovare le relatività che soddisfano il sistema di condizioni (5.1) che, come si è visto, nel caso del modello moltiplicativo (2.1) diventa:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{J} p_{..} \hat{\lambda}_i \hat{\mu}_j n_{ij} = \sum_{j=1}^{J} p_{ij} n_{ij} \qquad i=1,\dots,I \qquad (6.1.1) \\ \sum_{i=1}^{I} p_{..} \hat{\lambda}_i \hat{\mu}_j n_{ij} = \sum_{i=1}^{I} p_{ij} n_{ij} \qquad j=1,\dots,J \qquad (6.1.2) \end{cases}$$

dove $p_{..}$ è una stima di p in (2.1).

Questo sistema non ammette soluzioni ma si può tuttavia ottenere una soluzione approssimata risolvendo per via iterativa il sistema (5.2). A partire ad esempio da un insieme di valori $\{\hat{\mu}_j : j=1,...,J\}$ scelti arbitrariamente, questi possono venire sostituiti nelle equazioni (5.2.1) in modo da calcolare i valori $\{\hat{\lambda}_j : i=1,...,I\}$ che le rendono soddisfatte; questi verranno a loro volta sostituiti nelle (5.2.2) determinando un nuovo insieme di valori per i parametri $\{\hat{\mu}_j : j=1,...,J\}$ da inserire nelle (5.2.1), e così via. Diversi insiemi di valori "iniziali" $\{\hat{\mu}_j : j=1,...,J\}$ portano a diversi insiemi di soluzioni in quanto, come osservato nel paragrafo 2, le relatività per il modello moltiplicativo sono determinate a meno di una costante moltiplicativa.

Riportiamo un'interessante interpretazione per il metodo di stima dei totali marginali, nel caso in cui le informazioni statistiche disponibili siano quelle indicate al punto (a) del paragrafo 2 e nel caso in cui il periodo di osservazione T sia pari ad un anno.

Siano i n.a. S_{ij} distribuiti secondo una Poisson di parametri $(n_{ij}\, \vartheta_{ij})$ per ogni classe (i,j). Si ottiene allora la seguente espressione per la funzione di verosimiglianza:

$$L = \prod_{i,j} e^{-n_{ij}\vartheta_{ij}} \frac{(n_{ij}\, \vartheta_{ij})^{s_{ij}}}{s_{ij}!}$$

E' inoltre:

$$E(P_{ij}) = \frac{E(S_{ij})}{n_{ij}} = \frac{n_{ij}\, \vartheta_{ij}}{n_{ij}} = \vartheta_{ij} .$$

Ipotizzando per $E(P_{ij})$ il modello moltiplicativo (2.1), è:

$$\vartheta_{ij} = p\, \lambda_i\, \mu_j \quad \text{con } i=1,\dots,I \text{ e } j=1,\dots,J$$

e sostituendo nella funzione di verosimiglianza si ottiene:

$$L = \prod_{i,j} e^{-n_{ij}\, p\lambda_i\mu_j} \frac{\left(n_{ij}\, p\, \lambda_i\, \mu_j\right)^{s_{ij}}}{s_{ij}!}$$

ed ancora

$$\log L = \sum_{i,j} \left[-n_{ij}\, p\lambda_i\mu_j + s_{ij}\left(\log n_{ij} + \log p + \log \lambda_i + \log \mu_j\right) - \log(s_{ij}!)\right].$$

L'obiettivo è quello di determinare le stime di massima verosimiglianza per i parametri λ_i (i=1,..,I) e μ_j (j=1,...,J), adottando $\hat{p}$ = p.. come stima per p. Si tratta allora di risolvere il seguente problema:

$$\max_{\lambda_i,\mu_j} \sum_{i,j} \left[-n_{ij}\, p_{..}\, \lambda_i\mu_j + s_{ij}\left(\log n_{ij} + \log p_{..} + \log \lambda_i + \log \mu_j\right) - \log(s_{ij}!)\right].$$

Annullando le derivate parziali si ottiene il seguente sistema di condizioni:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{J} p_{..}\, \hat{\lambda}_i\, \hat{\mu}_j\, n_{ij} = \sum_{j=1}^{J} s_{ij} & i=1,\dots,I \\ \sum_{i=1}^{I} p_{..}\, \hat{\lambda}_i\, \hat{\mu}_j\, n_{ij} = \sum_{i=1}^{I} s_{ij} & j=1,\dots,J \end{cases}$$

che, essendo $s_{ij} = p_{ij}n_{ij}$ per ogni i=1,...,I e per ogni j=1,...,J, coincide con il sistema (6.1).

Nel caso del modello additivo (2.2), stimando preliminarmente p con $\hat{p}$ = p.., e sostituendo nel sistema (5.1) si ottiene:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{J} p_{..}(\hat{\lambda}_i + \hat{\mu}_j)\, n_{ij} = \sum_{j=1}^{J} p_{ij}n_{ij} & i=1,\dots,I \\ \sum_{i=1}^{I} p_{..}(\hat{\lambda}_i + \hat{\mu}_j)\, n_{ij} = \sum_{i=1}^{I} p_{ij}n_{ij} & j=1,\dots,J \end{cases} \qquad (6.2)$$

Questo è un sistema di equazioni lineari indeterminato (infatti la somma delle prime I equazioni coincide con la somma delle ultime J) che può venire risolto direttamente oppure per via iterativa risolvendo il seguente sistema:

$$\begin{cases} \hat{\lambda}_i = \frac{p_{i.}}{p_{..}} - \sum_{j=1}^{J} \hat{\mu}_j \frac{n_{ij}}{n_{i.}} & i=1,\dots,I \\ \hat{\mu}_j = \frac{p_{.j}}{p_{..}} - \sum_{i=1}^{I} \hat{\lambda}_i \frac{n_{ij}}{n_{.j}} & j=1,\dots,J \end{cases}$$

7. Il metodo di stima del minimo Chi-quadrato

Mediante questo metodo di stima, proposto da Bailey e Simon [1], l'obiettivo non è più quello di ottenere delle stime che soddisfino le condizioni di bilanciamento ma si intende piuttosto perseguire un "adattamento globale" della tariffa stimata alle osservazioni disponibili.

Consideriamo i n.a. P_{ij} ed i n.a. standardizzati $\frac{P_{ij}-E(P_{ij})}{\sqrt{Var(P_{ij})}}$; se i n.a. P_{ij} hanno distribuzione normale e sono indipendenti allora

$$\sum_{i,j} \frac{[P_{ij}-E(P_{ij})]^2}{Var(P_{ij})} \qquad (7.1)$$

è un n.a. con distribuzione χ^2 con IJ gradi di libertà. Obiettivo di questo metodo è quello di ottenere delle stime per $E(P_{ij})$ tali che risulti minima la quantità (7.1).
Supponiamo che le informazioni statistiche disponibili siano quelle indicate al punto (c) del paragrafo 2 e che il processo dei sinistri sia di tipo Poisson composto:

$$S_{ij} = \sum_{k=0}^{R_{ij}} D_k$$

dove R_{ij} sono i n.a. dei sinistri denunciati dai rischi di classe (i,j) aventi distribuzione Poisson di parametri $(n_{ij}\,\vartheta_{ij})$ e D_k è il n.a. danno prodotto dal k-esimo sinistro. Nelle ipotesi che vengono usualmente poste per i n.a. D_k (indipendenti ed ugualmente distribuiti, con $E(D_k)=E(D)$ per ogni k, nonché indipendenti da R_{ij}) risulta:

$$E(S_{ij}) = E(R_{ij})\, E(D)$$

$$Var(S_{ij}) = E(R_{ij})Var(D) + Var(R_{ij})[E(D)]^2 = E(R_{ij})\left(Var(D) + [E(D)]^2\right) =$$
$$= E(R_{ij})\, E\left(D^2\right) = E(S_{ij})\,\frac{E\left(D^2\right)}{E(D)}$$

Essendo $P_{ij} = \frac{S_{ij}}{n_{ij}}$ si ricava:

$$Var\,(P_{ij}) = Var\left(\frac{S_{ij}}{n_{ij}}\right) = \frac{1}{n_{ij}^2}\,Var\,(S_{ij}) = \frac{1}{n_{ij}^2}\,E(S_{ij})\,\frac{E\left(D^2\right)}{E(D)} = \frac{1}{n_{ij}}\,\frac{E(S_{ij})}{n_{ij}}\,\frac{E\left(D^2\right)}{E(D)} =$$
$$= \frac{1}{n_{ij}}\,E(P_{ij})\,\frac{E\left(D^2\right)}{E(D)}$$

e sostituendo, per ogni classe (i,j), nella (7.1) si ottiene:

$$\sum_{i,j} \frac{[P_{ij}-E(P_{ij})]^2}{Var(P_{ij})} = \sum_{i,j} \frac{[P_{ij}-E(P_{ij})]^2}{\frac{1}{n_{ij}}\,E(P_{ij})\,\frac{E\left(D^2\right)}{E(D)}} = \frac{E(D)}{E\left(D^2\right)} \sum_{i,j} n_{ij}\,\frac{[P_{ij}-E(P_{ij})]^2}{E(P_{ij})}$$

Iptizzando un certo modello per $E(P_{ij})$ (ad esempio (2.1) o (2.2)) e date le osservazioni p_{ij}, si determineranno le relatività che rendono minima la quantità:

$$Q = \sum_{i,j} n_{ij}\,\frac{[p_{ij}-E(P_{ij})]^2}{E(P_{ij})}\;;$$

le stime così ottenute vengono dette stime del minimo Chi-quadrato.

Consideriamo ancora il caso in cui l'informazione statistica disponibile sia quella indicata al punto (a) del paragrafo 2, P_{ij} è il n.a. dei sinistri denunciati dal generico rischio della classe (i,j), e supponiamo che i n.a. S_{ij} (sinistri denunciati dai rischi di classe (i,j)) abbiano distribuzione di Poisson di parametri ($n_{ij}\,\vartheta_{ij}$). E' allora:

$$E(S_{ij}) = n_{ij}\,\vartheta_{ij}$$

$$Var(S_{ij}) = n_{ij}\,\vartheta_{ij}.$$

ed essendo $P_{ij} = \frac{S_{ij}}{n_{ij}}$ si ottiene:

$$E(P_{ij}) = \vartheta_{ij}$$

$$Var\,(P_{ij}) = Var\left(\frac{S_{ij}}{n_{ij}}\right) = \frac{1}{n_{ij}^2}\,Var\,(S_{ij}) = \frac{1}{n_{ij}}\,\vartheta_{ij}$$

per cui la (7.1) diventa:

$$\sum_{i,j}\frac{[P_{ij}-E(P_{ij})]^2}{Var(P_{ij})} = \sum_{i,j}\frac{[P_{ij}-E(P_{ij})]^2}{\frac{E(P_{ij})}{n_{ij}}} = \sum_{i,j} n_{ij}\,\frac{[P_{ij}-E(P_{ij})]^2}{E(P_{ij})}$$

che coincide proprio con la Q.

Ipotizzando per $E(P_{ij})$ il modello moltiplicativo (2.1), e stimando preliminarmente p con $\hat{p}$ = p.., si troveranno le stime $\hat{\lambda}_i$ (con i=1,...,I) e $\hat{\mu}_j$ (con j=1,...,J) che rendono minima la seguente funzione:

$$Q = \sum_{i,j} n_{ij}\,\frac{\left[p_{ij} - p_{..}\,\lambda_i\,\mu_j\right]^2}{p_{..}\,\lambda_i\,\mu_j}$$

ma essendo

$$Q = \sum_{i,j}\frac{n_{ij}}{p_{..}\,\lambda_i\,\mu_j}\;p_{..}^2\left[\frac{p_{ij}}{p_{..}} - \lambda_i\,\mu_j\right]^2$$

il problema diventa quello di minimizzare la funzione Q_1:

$$Q_1 = \sum_{i,j}\frac{n_{ij}}{\lambda_i\,\mu_j}\left[\frac{p_{ij}}{p_{..}} - \lambda_i\,\mu_j\right]^2.$$

Annullando le derivate parziali si ottiene il seguente sistema di condizioni:

$$\begin{cases} \hat{\lambda}_i = \sqrt{\sum_{j=1}^{J} n_{ij}\,\frac{p_{ij}^2}{p_{..}^2\hat{\mu}_j} \Big/ \sum_{j=1}^{J} n_{ij}\,\hat{\mu}_j} & i=1,\ldots,I \\ \hat{\mu}_j = \sqrt{\sum_{i=1}^{I} n_{ij}\,\frac{p_{ij}^2}{p_{..}^2\hat{\lambda}_i} \Big/ \sum_{i=1}^{I} n_{ij}\,\hat{\lambda}_i} & j=1,\ldots,J \end{cases}$$

che può venire risolto iterativamente.

Ipotizzando invece per $E(P_{ij})$ il modello additivo (2.2), e stimando anche in questo caso preliminarmente p con $\hat{p}$ = p.., si troveranno le stime $\hat{\lambda}_i$ (con i=1,...,I) e $\hat{\mu}_j$ (con j=1,...,J) che rendono minima la seguente funzione:

$$Q = \sum_{i,j} n_{ij} \frac{\left[p_{ij} - p_{..}(\lambda_i+\mu_j)\right]^2}{p_{..}(\lambda_i+\mu_j)}$$

ma essendo

$$Q = \sum_{i,j} \frac{n_{ij}}{p_{..}(\lambda_i+\mu_j)} \; p_{..}^2 \left[\frac{p_{ij}}{p_{..}} - (\lambda_i+\mu_j)\right]^2$$

il problema è quello di minimizzare la funzione Q_1:

$$Q_1 = \sum_{i,j} \frac{n_{ij}}{\lambda_i+\mu_j} \left[\frac{p_{ij}}{p_{..}} - (\lambda_i+\mu_j)\right]^2.$$

Annullando le derivate parziali si ottiene il seguente sistema di condizioni:

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{j=1}^{J} \frac{\left(\frac{p_{ij}}{p_{..}}\right)^2 n_{ij}}{\left(\hat{\lambda}_i+\hat{\mu}_j\right)^2} = \sum_{j=1}^{J} n_{ij} \qquad i=1,\ldots,I \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{I} \frac{\left(\frac{p_{ij}}{p_{..}}\right)^2 n_{ij}}{\left(\hat{\lambda}_i+\hat{\mu}_j\right)^2} = \sum_{i=1}^{I} n_{ij} \qquad j=1,\ldots,J \end{cases}$$

A differenza dei sistemi precedenti, questo sistema non è facilmente risolvibile; esistono comunque dei metodi numerici che consento di trovarne le soluzioni (si veda [6] e [1]).

Per ottenere un sistema di condizioni che sia più semplice da risolvere è stato proposto di minimizzare anzicché la quantità Q, la quantità (si veda Daboni[3]):

$$Q_m = \sum_{i,j} n_{ij} \left[\frac{p_{ij}}{p_{..}} - (\lambda_i+\mu_j)\right]^2$$

Il sistema delle condizioni di annullamento delle derivate parziali coincide in questo caso con il sistema (6.2) delle condizioni di bilanciamento nel caso del modello additivo. Le stime delle relatività coincidono pertanto con quelle del metodo dei totali marginali e soddisfano quindi una duplice razionalità: da una parte tendono a realizzare il bilanciamento sulle zone e sulle classi di rischio, dall'altra soddisfano anche l'esigenza di ottenere un buon adattamento globale in quanto rendono minima la funzione Q_m che misura gli scostamenti tra valori osservati e valori stimati per ogni classe tariffaria.

La funzione Q calcolata in corrispondenza ai parametri $\hat{\lambda}_i$ e $\hat{\mu}_j$ stimati, è una misura della bontà dell'adattamento del modello ai dati osservati e può quindi essere in qualche modo indicativa, dovendo scegliere il modello tariffario. E' importante tuttavia osservare che il valore assunto da questa funzione non è in generale la determinazione di un n.a. χ^2. A tal proposito Bailey e Simon [1] hanno giustificato la scelta di questa funzione osservando che, nel caso ad esempio del modello moltiplicativo, se $\hat{\lambda}_i \cdot \hat{\mu}_j$ ha il significato di valore atteso del loss ratio relativo, della classe (i,j),[4] e il numero delle osservazioni è abbastanza elevato, i valori standardizzati dei loss ratio relativi osservati nelle varie classi hanno distribuzione "vicina" alla N(0,1). Per questo motivo loro attribuiscono alla funzione kQ (con k stimato dai dati) il significato di determinazione del n.a. χ^2 con IJ-I-J-1 gradi di libertà. Anche nel caso in cui si voglia costruire un modello per la frequenza di sinistro, in ipotesi di distribuzione poissoniana dei n.a. dei sinistri, la funzione Q, calcolata in corrispondenza ai parametri stimati è la determinazione di un n.a. che ha distribuzione approssimata χ^2(IJ-I-J-1).[5] Nel caso del modello tariffario per il premio equo, non si potrà in generale assumere che $\frac{E(D)}{E\left(D^2\right)}$ Q sia la determinazione di un n.a. con distribuzione che può venire approssimata da una χ^2(IJ-I-J-1), senza porre particolari ipotesi sui n.a. P_{ij}.

8. Il metodo di stima del minimo Chi-quadrato e del minimo Chi-quadrato modificato

Nel paragrafo precedente è stato introdotto, in modo piuttosto intuitivo ed aderente alle questioni di cui ci stiamo occupando, il metodo di stima del minimo Chi-quadrato ed è stata indicata una giustificazione al criterio, che suggerisce di determinare per i parametri le stime che rendono minima la funzione:

$$Q = \sum_{i,j} n_{ij} \frac{[p_{ij}-E(P_{ij})]^2}{E(P_{ij})} .$$

Essendo p_{ij} le osservazioni dei n.a. P_{ij} possiamo così riscrivere la funzione Q:

$$Q = \sum_{i,j} n_{ij} \frac{\left[\begin{pmatrix}\text{valori osservati}\\ \text{nella classe (i,j)}\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\text{valori attesi}\\ \text{nella classe (i,j)}\end{pmatrix}\right]^2}{\begin{pmatrix}\text{valori attesi}\\ \text{nella classe (i,j)}\end{pmatrix}}$$

ritrovando un'espressione che viene spesso utilizzata per richiamare questo metodo di

4 Il loss ratio relativo, per una classe, è dato dal rapporto tra il loss ratio della classe e quello dell'intero portafoglio.

5 Si veda Cramér [2] (pag. 250) per l'approssimabilità della distribuzione di Poisson con una Normale.

stima ma che ricorda molto anche l'espressione della funzione test χ^2 nel test di conformità.

Richiamando brevemente il problema (per i dettagli si può vedere Cramér [2], pagg. 416-434), l'obiettivo del test è quello di verificare se si può accettare l'ipotesi che un campione di n osservazioni provenga da una popolazione costituita da individui nei quali una certa caratteristica X può assumere determinazioni $x_1,\dots, x_r$, con probabilità $p_1,\dots, p_r$, essendo $p_i>0$ per ogni i e $\sum_{i=1}^{r} p_i = 1$. Indichiamo con ν_i il numero di individui osservati aventi caratteristica x_i, con $\sum_{i=1}^{r} \nu_i = n$. Per verificare l'ipotesi H_0 che gli n individui osservati provengano da questa popolazione si calcola la seguente funzione test:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{r} \frac{\left(\nu_i - n\ p_i\right)^2}{n\ p_i}$$

dove np_i è il numero atteso di individui osservati con caratteristica x_i. Sotto l'ipotesi H_0 la funzione χ^2 ha distribuzione asintotica (al divergere del numero n di osservazioni) Chi-quadrato con r-1 gradi di libertà.

Molto spesso in pratica, le probabilità p_i non sono note ma vengono stimate dai dati del campione ed in particolare si può supporre che siano $p_i(\alpha_1,\dots,\alpha_s)$ funzione di s parametri non noti. L'ipotesi H_0 sarà ora che il campione provenga da una popolazione descritta dalle probabilità $p_i(\alpha_1,\dots,\alpha_s)$, i=1,..,r, per qualche insieme di valori per i parametri. Se questi fossero noti la funzione test sarebbe semplicemente:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{r} \frac{\left(\nu_i - n\ p_i(\alpha_1,\dots,\alpha_s)\right)^2}{n\ p_i(\alpha_1,\dots,\alpha_s)}$$

e varrebbe il risultato già visto. Dovendo però stimare i parametri mediante i dati campionari si ottiene una diversa distribuzione asintotica per la funzione χ^2. Vale a tal proposito un importante risultato (si veda Cramèr[2], pag. 506) in base al quale, per un'ampia classe di metodi di stima per le probabilità $p_i(\alpha_1,\dots,\alpha_s)$, la funzione χ^2 ha distribuzione asintotica Chi-quadrato con r-s-1 gradi di libertà. Tra questi metodi di stima vi è anche il metodo del minimo Chi-quadrato, il cui obiettivo è proprio quello di determinare i parametri $\alpha_1,\dots,\alpha_s$ che rendono minima proprio la funzione χ^2. Derivando parazialmente si ottiene il seguente sistema di condizioni:

$$\sum_{i=1}^{r} \left[\frac{\nu_i - n\ p_i(\alpha_1,\dots,\alpha_s)}{p_i(\alpha_1,\dots,\alpha_s)} + \frac{\left(\nu_i - n\ p_i(\alpha_1,\dots,\alpha_s)\right)^2}{n\ p_i^2(\alpha_1,\dots,\alpha_s)} \right] \frac{dp_i}{d\alpha_j} = 0 \qquad j= 1,\dots,J$$

che in generale è un sistema difficile da risolvere. Poiché se n è elevato si ha

$\left(\nu_i - n\, p_i(\alpha_1,...,\alpha_s)\right)^2 \cong 0$ il sistema diventa:

$$\sum_{i=1}^{r} \left[\frac{\nu_i - n\, p_i(\alpha_1,...,\alpha_s)}{p_i(\alpha_1,...,\alpha_s)}\right] \frac{dp_i}{d\alpha_j} = 0 \qquad\qquad j= 1,...,J$$

e questo sistema coincide con il sistema delle derivate parziali della funzione χ^2 quando, derivando, si supponessero costanti le quantità al denominatore.

Questo metodo di stima viene detto del minimo Chi-quadrato modificato ed è interessante osservare che anche in questo caso χ^2 ha distribuzione asintotica $\chi^2(r\text{-}s\text{-}1)$.

9. Stima delle relatività mediante il metodo del minimo Chi-quadrato modificato

Jung [4] ha proposto il metodo del minimo Chi-quadrato modificato per stimare le relatività nel modello tariffario moltiplicativo, evindenziando inoltre un interessante collegamento con il metodo di stima dei totali marginali. In questo paragrafo descriveremo il metodo per un generico modello tariffario, che indichiamo con $g(\lambda_i,\mu_j)$. Nell'ipotesi $E(P_{ij}) = g(\lambda_i,\mu_j)$ con $i=1,...,I$ e $j=1,...,J$, la funzione Q del paragrafo 8 diventa:

$$Q = \sum_{i,j} n_{ij} \frac{\left[p_{ij} - g(\lambda_i,\mu_j)\right]^2}{g(\lambda_i,\mu_j)} \; .$$

Derivando parzialmente rispetto λ_i e μ_j, e supponendo costante la funzione $g(\lambda_i,\mu_j)$ scritta al denominatore, si ha:

$$\frac{dQ}{d\lambda_i} = \sum_j n_{ij} \frac{2\left[p_{ij} - g(\lambda_i,\mu_j)\right]}{g(\lambda_i,\mu_j)} \frac{dg}{d\lambda_i} \qquad\qquad i= 1,...,I$$

$$\frac{dQ}{d\mu_j} = \sum_i n_{ij} \frac{2\left[p_{ij} - g(\lambda_i,\mu_j)\right]}{g(\lambda_i,\mu_j)} \frac{dg}{d\mu_j} \qquad\qquad j= 1,...,J$$

Uguagliando a zero il sistema delle derivate parziali si ottiene:

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{j=1}^{J} n_{ij} \frac{p_{ij}}{g(\lambda_i,\mu_j)} \frac{dg}{d\lambda_i} = \sum_{j=1}^{J} n_{ij} \frac{dg}{d\lambda_i} & i=1,\dots,I \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{I} n_{ij} \frac{p_{ij}}{g(\lambda_i,\mu_j)} \frac{dg}{d\mu_j} = \sum_{i=1}^{I} n_{ij} \frac{dg}{d\mu_j} & j=1,\dots,J \end{cases} \qquad (9.1)$$

Se $g(\lambda_i,\mu_j) = p_{..}\, \lambda_i\, \mu_j$ si ha:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{J} n_{ij} \dfrac{p_{ij}}{p_{..}\,\lambda_i\,\mu_j}\, p_{..}\,\mu_j = \sum_{j=1}^{J} n_{ij}\, p_{..}\,\mu_j & i=1,\dots,I \\ \sum_{i=1}^{I} n_{ij} \dfrac{p_{ij}}{p_{..}\,\lambda_i\,\mu_j}\, p_{..}\,\lambda_i = \sum_{i=1}^{I} n_{ij}\, p_{..}\,\lambda_i & j=1,\dots,J \end{cases}$$

e quindi:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{J} n_{ij}\, p_{ij} = \sum_{j=1}^{J} n_{ij}\, p_{..}\,\lambda_i\,\mu_j & i=1,\dots,I \\ \sum_{i=1}^{I} n_{ij}\, p_{ij} = \sum_{i=1}^{I} n_{ij}\, p_{..}\,\lambda_i\,\mu_j & j=1,\dots,J \end{cases} .$$

In questo sistema riconosciamo le condizioni del metodo di stima dei totali marginali per cui nel caso del modello moltiplicativo le stime del minimo Chi-quadrato modificato coincidono con quelle del metodo dei totali marginali. Analogamente a quanto osservato nel paragrafo 7 per il modello additivo, anche in questo caso le stime trovate per il modello moltiplicativo verificano un duplice obiettivo, da una parte sono soddisfatte le condizioni di bilanciamento, dall'altra sono contenuti gli scostamenti tra i valori osservati e quelli stimati nelle singole classi (i,j). A tal proposito Jung osserva che se gli n_{ij} sono elevati la funzione Q (nel caso poissoniano) e la funzione $\dfrac{E(D)}{E\left(D^2\right)}\, Q$ negli altri casi (vedi paragrafo 7) hanno valore atteso IJ-I-J-1.

Se $g(\lambda_i,\mu_j) = p_{..}\,(\lambda_i+\mu_j)$ il sistema (9.1) diventa:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{J} n_{ij} \dfrac{p_{ij}}{p_{..}\,(\lambda_i+\mu_j)}\, p_{..} = \sum_{j=1}^{J} n_{ij}\, p_{..} & i=1,\dots,I \\ \sum_{i=1}^{I} n_{ij} \dfrac{p_{ij}}{p_{..}\,(\lambda_i+\mu_j)}\, p_{..} = \sum_{i=1}^{I} n_{ij}\, p_{..} & j=1,\dots,J \end{cases} .$$

In questo caso il sistema di condizioni non coincide più con le condizioni di bilanciamento e non è neppure di immediata risoluzione. Per il modello additivo avevamo infatti già osservato nel paragrafo 7 che la funzione Q_m dà luogo alle stesse condizioni del metodo dei totali marginali ed il sistema è risolvibile facilmente per via iterativa.

Sull'esigenza di ottenere sistemi di condizioni facilmente risolvibili si sono soffermati molti autori e tra questi Pitkänen [5], il quale suggerisce un metodo che egli chiama del minimo Chi-quadrato modificato e che consiste nel trovare i parametri che rendono minima la seguente funzione:

$$Q_p = \sum_{i,j} n_{ij} \frac{[p_{ij} - g(\lambda_i,\mu_j)]^2}{p_{ij}} .$$

Derivando parzialmente si ottiene:

$$\frac{dQ_p}{d\lambda_i} = \sum_j \frac{n_{ij}}{p_{ij}} 2 [p_{ij} - g(\lambda_i,\mu_j)] (-1) \frac{dg}{d\lambda_i} \qquad i= 1,...,I$$

$$\frac{dQ_p}{d\mu_j} = \sum_i \frac{n_{ij}}{p_{ij}} 2 [p_{ij} - g(\lambda_i,\mu_j)] (-1) \frac{dg}{d\mu_j} \qquad j= 1,...,J$$

ed uguagliando a zero il sistema di condizioni si ha:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{J} \frac{n_{ij}}{p_{ij}} [p_{ij} - g(\lambda_i,\mu_j)] \frac{dg}{d\lambda_i} = 0 & i=1,\ldots,I \\ \sum_{i=1}^{I} \frac{n_{ij}}{p_{ij}} [p_{ij} - g(\lambda_i,\mu_j)] \frac{dg}{d\mu_j} = 0 & j=1,\ldots,J \end{cases} \tag{9.2}$$

Se $g(\lambda_i,\mu_j) = p_{..} (\lambda_i+\mu_j)$ il sistema diventa:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{J} \frac{n_{ij}}{p_{ij}} [p_{ij} - p_{..} (\lambda_i+\mu_j)] p_{..} = 0 & i=1,\ldots,I \\ \sum_{i=1}^{I} \frac{n_{ij}}{p_{ij}} [p_{ij} - p_{..} (\lambda_i+\mu_j)] p_{..} = 0 & j=1,\ldots,J \end{cases}$$

da cui si ottiene:

$$\begin{cases} \lambda_i = \dfrac{\sum_{j=1}^{J} \frac{n_{ij}}{p_{..}} - \sum_{j=1}^{J} \frac{n_{ij}}{p_{ij}} \mu_j}{\sum_{j=1}^{J} \frac{n_{ij}}{p_{ij}}} & i=1,\ldots,I \\ \mu_j = \dfrac{\sum_{i=1}^{I} \frac{n_{ij}}{p_{..}} - \sum_{i=1}^{I} \frac{n_{ij}}{p_{ij}} \lambda_i}{\sum_{i=1}^{I} \frac{n_{ij}}{p_{ij}}} & j=1,\ldots,J \end{cases}$$

Anche questo sistema può venire facilmente risolto per via iterativa.

10. Il metodo di stima dei minimi quadrati

Con riferimento ai n.a. P_{ijk} (con i=1,...,I, j=1,..,J e k=1,...,n_{ij}) descritti nel paragrafo 2 si fa la seguente ipotesi:

$$P_{ijk} = E(P_{ij}) + U_{ijk} \quad \text{per ogni } i=1,...,I,\ j=1,...,J \text{ e } k=1,...,n_{ij};$$

dove U_{ijk} sono n.a. equi che rappresentano il termine di errore nel modello.
Ipotizzando ancora per $E(P_{ij})$ un modello tariffario ((2.1) oppure (2.2)) il metodo di

stima dei minimi quadrati consiste nel determinare le stime dei parametri che rendono minima la quantità:

$$SS = \sum_{i=1}^{I} \sum_{j=1}^{J} \sum_{k=1}^{n_{ij}} [p_{ijk} - E(P_{ij})]^2.$$

Posto $p_{ij} = \dfrac{\sum_{k=1}^{n_{ij}} p_{ijk}}{n_{ij}}$ si ha:

$$SS = \sum_{i=1}^{I} \sum_{j=1}^{J} \sum_{k=1}^{n_{ij}} [(p_{ijk} - p_{ij}) + (p_{ij} - E(P_{ij}))]^2 =$$

$$= \sum_{i=1}^{I} \sum_{j=1}^{J} \sum_{k=1}^{n_{ij}} (p_{ijk} - p_{ij})^2 + \sum_{i=1}^{I} \sum_{j=1}^{J} \sum_{k=1}^{n_{ij}} (p_{ij} - E(P_{ij}))^2 +$$

$$+ 2 \sum_{i=1}^{I} \sum_{j=1}^{J} (p_{ij} - E(P_{ij})) \sum_{k=1}^{n_{ij}} (p_{ijk} - p_{ij})$$

Poiché $\sum_{k=1}^{n_{ij}} (p_{ijk} - p_{ij}) = 0$ è equivalente minimizzare la quantità SS oppure la quantità

$$Q_S = \sum_{i=1}^{I} \sum_{j=1}^{J} n_{ij} [p_{ij} - E(P_{ij})]^2$$

(metodo dei <u>minimi quadrati pesati</u>)[6].

Ipotizzando per $E(P_{ij})$ il modello moltiplicativo (2.1), e stimando preliminarmente p con $\hat{p}$ = p.., si troveranno le stime $\hat{\lambda}_i$ (con i=1,...,I) e $\hat{\mu}_j$ (con j=1,...,J) che rendono minima la funzione Q_S:

$$Q_S = \sum_{i=1}^{I} \sum_{j=1}^{J} n_{ij} \left(p_{ij} - p_{..} \lambda_i \mu_j\right)^2 .$$

Annullando le derivate parziali si ottiene il seguente sistema di condizioni:

$$\begin{cases} \hat{\lambda}_i = \dfrac{\sum_{j=1}^{J} \hat{\mu}_j n_{ij} p_{ij}}{p_{..} \sum_{j=1}^{J} \hat{\mu}_j^2 n_{ij}} & i=1,\ldots,I \\[2ex] \hat{\mu}_j = \dfrac{\sum_{i=1}^{I} \hat{\lambda}_i n_{ij} p_{ij}}{p_{..} \sum_{i=1}^{I} \hat{\lambda}_i^2 n_{ij}} & j=1,\ldots,J \end{cases}$$

che può venire risolto iterativamente.

6 In ipotesi di indipendenza e di distribuzione normale, con varianza σ^2, per i n.a. U_{ijk}, le stime dei minimi quadrati coincidono con le stime di massima verosimiglianza.

Ipotizzando invece per $E(P_{ij})$ il modello additivo (2.2), e stimando anche in questo caso preliminarmente p con $\hat{p} = p_{..}$, si troveranno le stime $\hat{\lambda}_i$ (con i=1,...,I) e $\hat{\mu}_j$ (con j=1,...,J) che rendono minima la seguente funzione:

$$Q_S = \sum_{i=1}^{I} \sum_{j=1}^{J} n_{ij} \left(p_{ij} - p_{..}(\lambda_i+\mu_j)\right)^2 .$$

Essendo

$$Q_S = p_{..}^2 \sum_{i=1}^{I} \sum_{j=1}^{J} n_{ij} \left(\frac{p_{ij}}{p_{..}} - (\lambda_i+\mu_j)\right)^2$$

è equivalente minimizzare la funzione Q_S e la funzione Q_m del paragrafo 7 e quindi, per quanto già osservato, le stime dei minimi quadrati coincidono con quelle del metodo dei totali marginali.

11. Alcune considerazioni sulla scelta del modello tariffario e del metodo di stima dei parametri.

Quello della scelta del modello tariffario (moltiplicativo o additivo) e del metodo di stima dei parametri è un problema piuttosto dibattuto. In generale infatti l'approccio degli attuari al problema è stato quello di verificare la capacità dei modelli di venire "adattati" ad un insieme di dati osservati, controllando eventualmente mediante osservazioni in anni successivi l'efficacia della tariffa che era stata stimata. Riportiamo in questo paragrafo alcune osservazioni che possono servire da guida di fronte al problema pratico di costruzione di una tariffa.

Il modello moltiplicativo con le relatività intuitive è il primo modello che è stato applicato ma è pure quello che appare più insoddisfacente, a meno che le due variabili tariffarie considerate non siano tra loro indipendenti.

Bailey, in un lavoro del 1963 (vedi citazione in Weisberg H.J., Tomberlin T.J. [7]), suggerisce di applicare il metodo di stima dei totali marginali sia al modello moltiplicativo che a quello additivo e di scegliere quindi tra i due quello che rende minima la funzione Q del paragrafo 7 (minimo Chi-quadrato).

Per quanto riguarda il metodo di stima del minimo Chi-quadrato si può osservare che, poiché le stime ottenute sono asintoticamente equivalenti alle stime di massima verosimiglianza[7], possono venire ragionevolmente impiegate nella generalità delle

7 Si veda Weisberg H.J., Tomberlin T.J. [7] e Cramér H. [2] (pag. 426 e pag. 506).

situazioni.

Chang e Fairley, in un lavoro del 1979 (vedi citazione in Weisberg H.J., Tomberlin T.J. [7]), suggeriscono invece di adottare il modello additivo ed il metodo di stima dei minimi quadrati. In questo caso infatti le stime trovate coincidono con quelle del metodo dei totali marginali e, sotto opportune ipotesi, gli stimatori dei minimi quadrati coincidono con quelli di massima verosimiglianza; inoltre sono stimatori corretti, consistenti ed hanno varianza minima nell'insieme degli stimatori lineari corretti. Tuttavia, tra le ipotesi è posta anche la varianza costante ($var(P_{ijk})=\sigma^2$per ogni $i=1,...,I$, $j=1,...,J$ e $k=1,...,n_{ij}$) per cui il metodo non andrebbe applicato in tutti i casi in cui questa ipotesi risulta violata.

In generale, se il risarcimento aleatorio per un singolo sinistro è indipendente dal numero aleatorio dei sinistri, gli Autori sono concordi nel suggerire di costruire due modelli tariffari separati: uno per il danno medio per sinistro ed uno per la frequenza di sinistro. Se poi il danno per singolo sinistro è indipendente dalla classe tariffaria, molto semplicemente tutte le informazioni disponibili possono venire utilizzate globalmente per stimare l'esborso atteso.

In ipotesi di distribuzione poissoniana per il numero dei sinistri, può essere ragionevole adottare per la frequenza di sinistro il modello moltiplicativo e stimare le relatività mediante il metodo dei totali marginali (ottenendo quindi stime che coincidono con quelle di massima verosimiglianza). Volendo invece applicare il modello additivo, il metodo di stima del minimo Chi-quadrato e quello dei totali marginali sono i più opportuni in quanto difficilmente si potrà assumere l'ipotesi di varianza costante, per poter applicare il metodo dei minimi quadrati.

Per la stima del danno medio, non ci sono ragioni per ritenere preferibile un particolare modello e metodo di stima. In Van Eegen J., Greup E.K., Nijssen J.A. [6] vengono indicati i metodi dei totali marginali e dei minimi quadrati.

Se non è accettabile l'ipotesi di risarcimenti indipendenti dal numero dei sinistri, è necessario costruire direttamente un modello tariffario per il premio equo. In tal caso Weisberg e Tomberlin [7] indicano come preferibile il metodo di stima del minimo Chi-quadrato; Van Eegen J., Greup E.K., Nijssen J.A.[7] invece, osservando un'eccessiva sensibilità di questo metodo in presenza di singoli risarcimenti particolarmente elevati rispetto ai valori medi (outliers), ritengono più soddisfacente il metodo dei totali marginali.

BIBLIOGRAFIA:

[1] Bailey R.A., Simon L.J., "Two Studies in Automobile Insurance Ratemaking", ASTIN Bulletin, vol. 1,pagg. 192-217, 1960.

[2] Cramér H., "Mathematical Methods of Statistics", Princeton University Press, 1966.

[3] Daboni L., "Lezioni di tecnica attuariale delle assicurazioni contro i danni", Edizioni LINT Trieste, 1993.

[4] Jung J., "On Automobile Insurance Ratemaking - Estimating relativities in a multiplicative model", ASTIN Bulletin, vol. 5, pagg. 41-48, 1968.

[5] Pitkänen P., "Tariff Theory", ASTIN Bulletin, pagg. 204-228, 1975.

[6] Van Eegen J., Greup E.K., Nijssen J.A., "Rate Making", Survey of Actuarial Studies n. 2, Nat. Nederl. N. V. The Netherlands, 1983.

[7] Weisberg H.J., Tomberlin T.J., "A Statistical Perspective on Actuarial Methods for Estimating Pure Premiums from Cross-Classified Data", Journal of Risk and Insurance, vol. 49, pagg. 539-563, 1982.