

ESPERIENZA III

DETERMINAZIONE DEL MODULO DI YOUNG

3.1 - NOTE DI TEORIA

Ogni corpo sottoposto a forze esterne si deforma. In un solido si possono avere deformazioni di trazione, di compressione, di taglio, di torsione, ecc.

Per introdurre gli sforzi normali di trazione, consideriamo una sbarra verticale di lunghezza iniziale ℓ vincolata ad un estremo e sottoposta nell'altro estremo ad una forza $\vec{F}$ avente la sua stessa direzione. La sbarra, così sollecitata, rimane in equilibrio statico in virtù della reazione $-\vec{F}$, offerta dal vincolo. In ogni sezione normale di area S agisce uno sforzo, F/S , detto *sforzo normale di trazione o sforzo longitudinale*. Esso è trasmesso in tutte le sezioni e determina, quale effetto macroscopico, un allungamento $\Delta\ell$ il cui valore relativo $\Delta\ell/\ell$, dicesi *deformazione di trazione*.

Per sforzi applicati non superiori ad un certo valore limite, tali cioè da non provocare deformazioni permanenti del sistema, vale la *Legge di Hooke*. Essa stabilisce una relazione lineare tra la deformazione prodotta, $\Delta\ell/\ell$, e lo sforzo applicato ad un corpo in equilibrio meccanico e termico:

$$\frac{\Delta\ell}{\ell} = \frac{1}{E} \left(\frac{F}{S} \right).$$

Nell'espressione precedente, E è il *modulo elastico di trazione o modulo di Young del materiale*. Esso ha le dimensioni di uno sforzo e dunque si esprime nelle stesse unità di misura della pressione. In definitiva nei limiti di validità della legge di Hooke, per il modulo di Young si ha la seguente espressione:

$$E = \left(\frac{F}{S} \right) \frac{\ell}{\Delta\ell}.$$

Nel caso di un filo, di un'asta, o di una sbarra la misura di E si esegue indirettamente mediante opportuni dispositivi detti *estensimetri*. Essi servono a misurare l'allungamento di un campione sottoposto ad uno sforzo di trazione noto.

Nel nostro caso il campione è un filo metallico e l'allungamento viene misurato per mezzo di un estensimetro che impiega il *metodo della Leva Ottica di Pogendorff*.

3.2 - DESCRIZIONE DELLA APPARECCHIATURA E SUO FUNZIONAMENTO

Il filo metallico è bloccato tramite un morsetto ad un sostegno formato da due aste metalliche congiunte rigidamente l'una all'altra da una base e da una traversa superiore (Fig. 2.5). La base di sostegno è fissata su un treppiede di appoggio.

Il filo, disposto verticalmente, compie un giro attorno ad un cilindretto metallico, C , dotato di specchietto. L'altra estremità è fissata al gambo di un piattello che serve a sostenere le masse che provocano l'allungamento.

Un proiettore, P , ed una scala graduata, S , sono sistemati in modo che sulla scala si formi l'immagine dell'apertura del proiettore riflessa dallo specchietto situato sul cilindretto di cui sopra. È essenziale che l'immagine del filo, sistemato sul diametro orizzontale della lente del proiettore, sia a fuoco sulla scala. Ciò si può ottenere spostando opportunamente sia il proiettore che la scala e regolando la posizione della parte mobile del proiettore rispetto al resto dello strumento. Ciò fatto l'aggiunta di un carico F sul piattello porta ad uno spostamento $\Delta\ell$ dell'immagine del filo del proiettore sulla scala, situata a distanza ℓ dallo specchietto.

L'allungamento $\Delta\ell$ dà luogo ad una rotazione del cilindretto, e quindi dello specchietto, di un angolo $\alpha = \Delta\ell/r$ ove r è il raggio del cilindretto. Se prima della rotazione l'angolo d'incidenza sullo spec

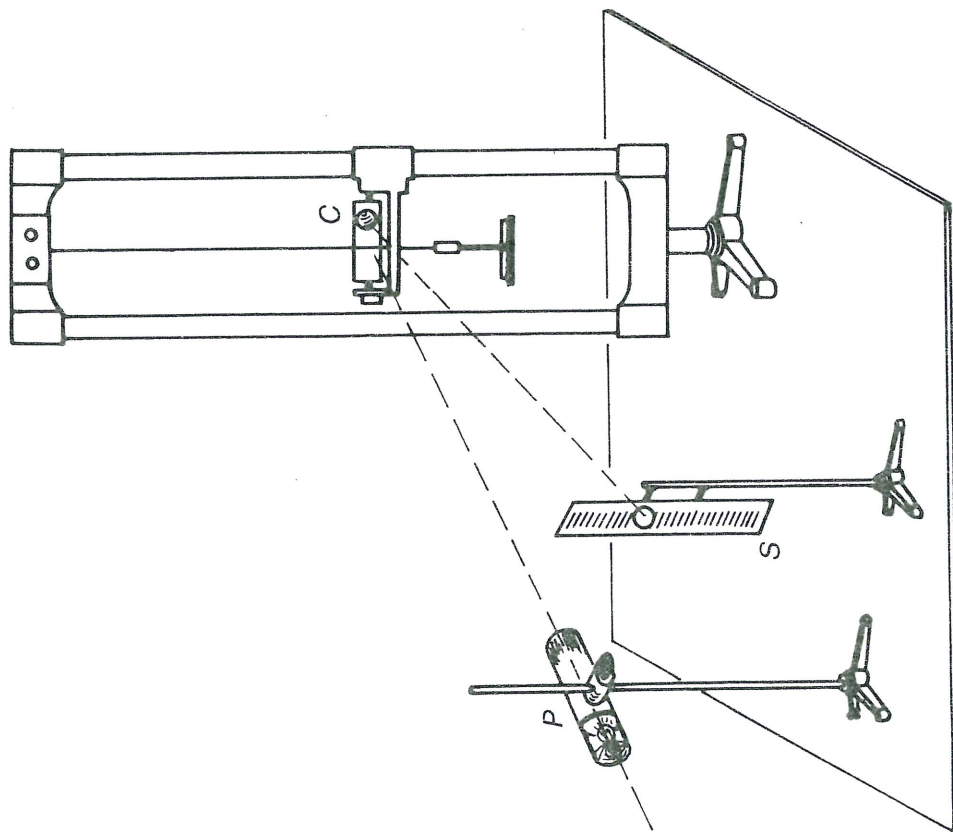


Fig. 2.5

chietto era β , dopo la rotazione è $(\alpha + \beta)$ perché la normale allo specchio è ruotata di α (Fig. 2.6). Quindi $(\alpha + \beta)$ è anche l'angolo che il raggio riflesso s' forma con la normale n' allo specchio ruotato. Ne segue che $(2\alpha + \beta)$ è l'angolo formato dal raggio riflesso s' con la normale n allo specchio non ruotato, e 2α è l'angolo compreso tra i due raggi riflessi (principio della leva ottica).

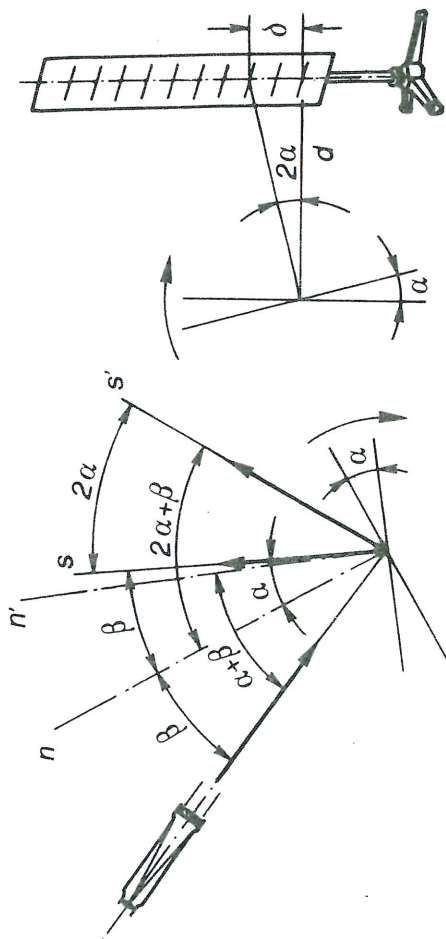


Fig. 2.6

Essendo 2α molto piccolo, si può confondere δ con l'arco di circonferenza di raggio d ed angolo al centro 2α per cui: $2\alpha = \delta/d$ e $\Delta\ell = r\delta/(2d)$.

Sostituendo $\Delta\ell$ nell'espressione di E si ha la formula risolutiva:

$$E = \frac{2 d \ell F}{r S \delta}.$$

3.3 - ESECUZIONE DELLE MISURE

Dalla espressione di E risultano le grandezze da misurare.

La distanza d tra la scala e lo specchio e la lunghezza ℓ del filo metallico (dal punto in cui esce dal morsetto, al cilindretto) si misurano con un metro avvolgibile. Il contributo alla rotazione del cilindretto dovuto alla parte del filo avvolto attorno ad esso dipende dall'attrito tra filo e cilindretto. Poiché l'attrito non è costante lungo la linea di contatto, lo spostamento dei vari elementi di filo è diverso da punto a punto; dunque non si può dire esattamente quale sia il contributo all'allungamento dovuto a questa parte di filo. La lunghezza ℓ che effettivamente contribuisce alla rotazione del cilindretto è, in pratica,

la media tra la lunghezza del filo compreso tra il morsetto ed il primo punto di tangenza con il cilindretto, e la lunghezza tra il morsetto ed il secondo punto di tangenza.

Il raggio r del cilindretto si misura con il calibro a cursore.

Lo spostamento δ si misura osservando lo spostamento sulla scala (prima e dopo l'aggiunta del carico F) dell'immagine riflessa dallo specchio (linea di fede).

La sezione S si ottiene misurando con il calibro palmer il diametro ϕ del filo. La lettura del numero di millimetri si effettua contando le graduazioni della scala longitudinale del palmer rimaste scoperte, mentre le frazioni di millimetro si leggono sul tamburo ruotante in corrispondenza alla tacca fissa.

Il valore del carico, F , è marcato direttamente sui pesi in dotazione.

3.4 - CALCOLO DELL'ERRORE

Nel caso si esegua una sola misura di E , occorre valutare l'errore massimo relativo e l'errore massimo assoluto. Poiché l'espressione di E è una forma monomia si ha:

$$\frac{\Delta E}{E} = \left(\frac{\Delta \ell}{\ell} + \frac{\Delta d}{d} + \frac{\Delta \delta}{\delta} + \frac{\Delta r}{r} + \frac{\Delta F}{F} + \frac{\Delta S}{S} \right),$$

$$\Delta E = \left(\frac{\Delta \ell}{\ell} + \frac{\Delta d}{d} + \frac{\Delta \delta}{\delta} + \frac{\Delta r}{r} + \frac{\Delta F}{F} + \frac{\Delta S}{S} \right) E;$$

$\Delta \ell$, Δd , $\Delta \delta$, Δr , ΔF , ΔS , sono rispettivamente gli errori massimi assoluti su ℓ , d , δ , r , F , ed S determinati dalle caratteristiche degli strumenti di misura impiegati.

Si noti che l'errore su F è trascurabile essendo i carichi realizzati mediante masse campione e che $\Delta S/S$ è uguale a $2\Delta\phi/\phi$.

ESPERIENZA IV

DETERMINAZIONE DEL MODULO DI TORSIONE

4.1 - DESCRIZIONE DELL'APPARECCHIATURA E SUO FUNZIONAMENTO

Un filo metallico è fissato con una estremità ad un sostegno fisso, mentre all'altra estremità è appeso un equipaggio in grado di ruotare attorno al proprio asse (coincidente con la direzione verticale del filo) e dotato di due sottili bracci sporgenti (Fig. 2.7). L'equipaggio può essere fatto ruotare su se stesso realizzando un opportuno spostamento angolare dei bracci. Per effetto della torsione del filo l'equipaggio, lasciato libero, inizia a muoversi di moto rotatorio periodico attorno all'asse di simmetria. Il periodo di tale moto dipende, come vedremo, dal momento di inerzia dell'equipaggio mobile. Tale momento d'inerzia può essere variato aggiungendo o togliendo opportune masse aventi forma di corone cilindrica. Le masse si inseriscono sull'equipaggio mobile dal basso, liberando il portapesi dopo aver svitato la vite zigrinata

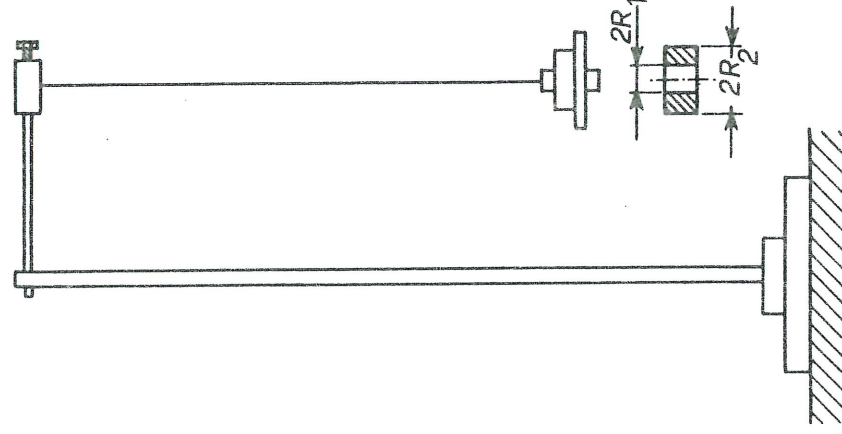


Fig. 2.7

4.2 - NOTE DI TEORIA

Il filo sottoposto a torsione sviluppa una coppia elastica di reazione il cui momento (entro i limiti di elasticità) ha una componente assiale data da:

$$M = - C \phi.$$

In questa espressione C è la costante di torsione del filo, ϕ è l'angolo di cui è ruotata la sua sezione estrema rispetto alla posizione di riposo (angolo di torsione).

Dal teorema del momento assiale della quantità di moto

$$M = \frac{dL}{dt},$$

per il moto dell'equipaggio si ha l'equazione:

$$\frac{d^2 \phi}{dt^2} + \omega^2 \phi = 0.$$

Ove $\omega = \sqrt{\frac{C}{I_0}}$, rappresenta la pulsazione del moto armonico, I_0 essendo il momento d'inerzia dell'equipaggio mobile. Il periodo è dunque:

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{I_0}{C}}. \quad (2.5)$$

Se si aggiunge all'equipaggio mobile una massa (a forma di corona cilindrica) di momento d'inerzia I_1 , il momento d'inerzia complessivo del sistema è: $I_0 + I_1$ ed il periodo diviene:

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{I_0 + I_1}{C}}. \quad (2.6)$$

Elevando al quadrato e quindi sottraendo l'Eq. (2.5) dalla Eq. (2.6), si ottiene:

$$T_1^2 - T_0^2 = 4\pi^2 \frac{I_1}{C},$$

da cui:

$$C = \frac{4\pi^2 I_1}{T_1^2 - T_0^2}. \quad (2.7)$$

L'Eq. (2.7) dà C in funzione dei periodi T_1 e T_0 e del momento d'inerzia I_1 della massa aggiunta. Poiché la massa aggiunta ha la forma di un cilindro cavo di raggi R_1 e R_2 , I_1 è espresso da:

$$I_1 = \left(\frac{R_1^2 + R_2^2}{2} \right) m.$$

Il modulo di torsione μ è connesso alla costante di torsione C dalla relazione:

$$C = \mu \frac{r^4}{\ell}.$$

Questa relazione unitamente alla Eq. 2.7 dà infine:

$$\mu = 4\pi^2 \frac{\ell}{r^4} \frac{I_1}{(T_1^2 - T_0^2)}.$$

A conclusione del paragrafo osserviamo che, a differenza di C , μ non dipende dalle dimensioni del filo. Si lascia al lettore il verificare che le sue dimensioni sono quelle di una pressione.

4.3 - ESECUZIONE DELLE MISURE

I raggi R_1 ed R_2 si misurano con il calibro a cursore facendo uso delle punte deviatrici per R_1 e delle ganasce per R_2 .

I periodi T_1 e T_0 si misurano come segue: con un leggero spostamento angolare dei bracci sporgenti si mette in oscillazione il sistema (lo spostamento angolare ϕ deve essere di qualche grado).

Si lascia partire il cronometro quando il sistema si ferma prima di invertire il senso del moto, si contano quindi dieci oscillazioni complete fermando il cronometro alla fine della decima oscillazione. Il periodo si otterrà dividendo per dieci l'intervallo di tempo così misurato. Con questo procedimento si commette un errore sulla determinazione del periodo pari ad 1/10 di quello che si sarebbe commesso effettuando la misura di una sola oscillazione.

La lunghezza del filo si misura con un metro avvolgibile.

Il diametro si misura con il calibro palmer.

4.4 - CALCOLO DELL'ERRORE

Nel caso di misure ripetute, per il calcolo del valore più probabile $\bar{\mu}$ di μ e per l'errore quadratico medio $\sigma_{\bar{\mu}}$ si applica la legge di propagazione degli errori, (cfr. Parte I, § 6.2). Si ha perciò:

$$\bar{\mu} = \frac{4\pi^2}{r^4} \frac{\bar{\ell} \bar{I}_1}{(\bar{T}_1^2 - \bar{T}_0^2)}.$$

$$\sigma_{\bar{\mu}} = \sqrt{\left(\frac{\partial \mu}{\partial r}\right)^2 \sigma_r^2 + \left(\frac{\partial \mu}{\partial \ell}\right)^2 \sigma_{\ell}^2 + \left(\frac{\partial \mu}{\partial I_1}\right)^2 \sigma_{I_1}^2 + \left(\frac{\partial \mu}{\partial T_1}\right)^2 \sigma_{T_1}^2 + \left(\frac{\partial \mu}{\partial T_0}\right)^2 \sigma_{T_0}^2};$$

dove

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mu}{\partial r} &= -\frac{16\pi^2 \ell I_1}{r^5 (T_1^2 - T_0^2)}, \quad \frac{\partial \mu}{\partial I_1} = \frac{4\pi^2 \ell}{r^4 (T_1^2 - T_0^2)}, \quad \frac{\partial \mu}{\partial T_0} = \frac{8\pi^2 \ell I_1 T_0}{r^4 (T_1^2 - T_0^2)^2}, \\ \frac{\partial \mu}{\partial \ell} &= \frac{4\pi^2 I_1}{r^4 (T_1^2 - T_0^2)}, \quad \frac{\partial \mu}{\partial T_1} = -\frac{8\pi^2 \ell I_1 T_1}{r^4 (T_1^2 - T_0^2)^2}, \end{aligned}$$

si calcolano in corrispondenza ai valori medi $\bar{r}$, $\bar{\ell}$, $\bar{I}_1$, $\bar{T}_1$ e $\bar{T}_0$.

Si osservi che l'errore sul momento d'inerzia σ_{I_1} è trascurabile per la precisione con cui sono noti R_1 , R_2 ed m .

Se invece si esegue una sola misura, l'errore massimo assoluto $\Delta\mu$ è dato da:

$$\begin{aligned} \Delta\mu &= \left| \frac{\partial \mu}{\partial r} \right| \Delta r + \left| \frac{\partial \mu}{\partial \ell} \right| \Delta \ell + \left| \frac{\partial \mu}{\partial I_1} \right| \Delta I_1 + \\ &+ \left| \frac{\partial \mu}{\partial T_1} \right| \Delta T_1 + \left| \frac{\partial \mu}{\partial T_0} \right| \Delta T_0, \end{aligned}$$

dove Δr , $\Delta \ell$, ΔI_1 , ΔT_1 e ΔT_0 hanno, come altrove, il significato di errori massimi assoluti associati alle misure eseguite su r , ℓ , I_1 , T_1 e T_0 .