

# Misura dei moduli di Young e Coulomb dell'acciaio

---

# Deformazioni elastiche

---

Questa coppia di esperienze è finalizzata allo studio delle **proprietà elastiche dei materiali sottoposti a sforzi di trazione o di taglio**. A tale scopo faremo uso di due apparati sperimentali denominati estensimetro e torsionometro,

Con il termine di **corpo rigido** si indica un solido indeformabile, ossia un oggetto che mantiene la propria forma e volume sotto l'azione di qualsiasi sollecitazione. **La nozione di corpo rigido è un'astrazione**.

Tutti i solidi, se sottoposti a sollecitazioni quali trazione, compressione, torsione, scorrimento, si deformano.

Se le sollecitazioni sono intense le deformazioni possono essere permanenti e si può anche arrivare al **cedimento strutturale** (rottura) del materiale.

# Deformazioni elastiche

---

Questa coppia di esperienze è finalizzata allo studio delle **proprietà elastiche dei materiali sottoposti a sforzi di trazione o di taglio**. A tale scopo faremo uso di due apparati sperimentali denominati estensimetro e torsionometro,

Con il termine di **corpo rigido** si indica un solido indeformabile, ossia un oggetto che mantiene la propria forma e volume sotto l'azione di qualsiasi sollecitazione. **La nozione di corpo rigido è un'astrazione**.

Tutti i solidi, se sottoposti a sollecitazioni quali trazione, compressione, torsione, scorrimento, si deformano.

Se le sollecitazioni sono intense le deformazioni possono essere permanenti e si può anche arrivare al **cedimento strutturale** (rottura) del materiale.

# Deformazioni elastiche

---

Una deformazione è detta **elastica** se il corpo torna allo **stato originario** quando vengono meno **le forze che ne hanno causato la deformazione**.

La deformazione è **elastica** se le forze applicate sono inferiori ad un limite che dipende dal materiale, dalla temperatura, dal tipo di deformazione considerata, etc.

Per le deformazioni elastiche si osserva una relazione di **proporzionalità tra sollecitazione e deformazione**.

$$\Delta L \propto F$$

Questo comportamento è noto come **legge di Hooke**.

La **legge di Hooke** è valida per la maggior parte dei minerali, per il vetro, per i materiali ceramici e per i metalli. Per i metalli duttili è vera per carichi modesti.

# Allungamenti per trazione

---

Una deformazione è detta **elastica** se il corpo torna allo **stato originario** quando vengono meno **le forze che ne hanno causato la deformazione**.

La deformazione è **elastica** se le forze applicate sono inferiori ad un limite che dipende dal materiale, dalla temperatura, dal tipo di deformazione considerata, etc.

Per le deformazioni elastiche si osserva una relazione di **proporzionalità tra sollecitazione e deformazione**.

$$\Delta L \propto F$$

Questo comportamento è noto come **legge di Hooke**.

La **legge di Hooke** è valida per la maggior parte dei minerali, per il vetro, per i materiali ceramici e per i metalli. Per i metalli duttili è vera per carichi modesti.

# Allungamento per trazione

Possiamo esplicitare queste dipendenze in modo esplicito nello scrivere la costante elastica  $k$

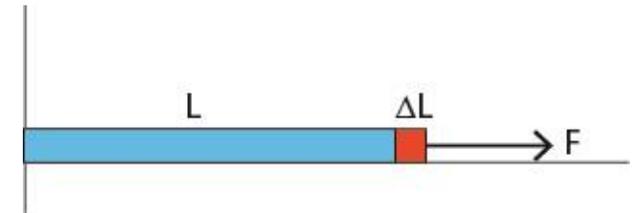
$$F = k(S, L)\Delta L$$

E scrivere

$$\sigma S = k(S, L)L \varepsilon$$

Ovvero

$$\sigma = \frac{k(S, L)L}{S} \varepsilon \quad \Rightarrow \quad \sigma = E_M(T)\varepsilon$$

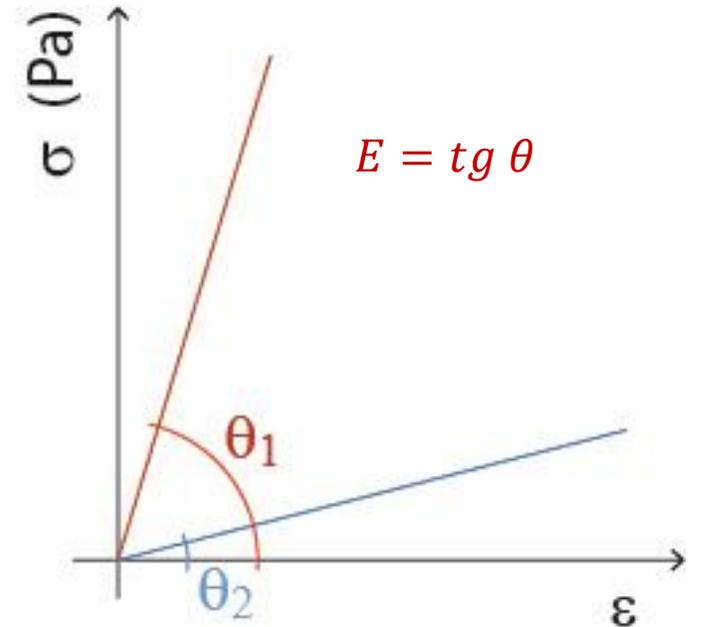


Dove  $E_M(T) = \frac{k(S, L)L}{S}$ , misurato in  $(N m^{-2})$ , ovvero in Pascal, è il **Modulo di Young** del materiale, che non dipende dalle caratteristiche geometriche ma solo dalla temperature.

# Rappresentazione grafica legge di Hooke

Il corpo rigido è rappresentato da una retta verticale (modulo di Young  $\infty$ )

Materiale	$E$ (Pa) @ 300 K	$E$ (Pa) @ 800 K
Acciaio	$2.1 \times 10^{11}$	
Alluminio	$0.7 \times 10^{11}$	$0.5 \times 10^{11}$
Ferro	$2.0 \times 10^{11}$	$1.5 \times 10^{11}$
Rame	$1.1 \times 10^{11}$	
Vetro	$0.7 \times 10^{11}$	
Calcestruzzo	$2.3 \times 10^{10}$	
Granito	$2.5 \times 10^{10}$	



# Esempio numerico

---

Un filo di alluminio con un diametro  $d = 2\text{ mm}$  ed una lunghezza  $l = 2.0\text{ m}$  si allunga di  $1.08\text{ mm}$  quando è sottoposto ad una trazione di  $120\text{ N}$

$$\sigma = \frac{F}{S} = \frac{120}{\pi \times 10^{-6}} = 3.82 \times 10^7 \text{ Pa} \quad \varepsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{3.82 \times 10^7}{0.7 \times 10^{11}} = 0.54 \times 10^{-3}$$

Ovvero  $\Delta L = \varepsilon L = 0.54 \times 10^{-3} \times 2.0 = 1.08 \times 10^{-3} \text{ m}$

# Energia potenziale elastica

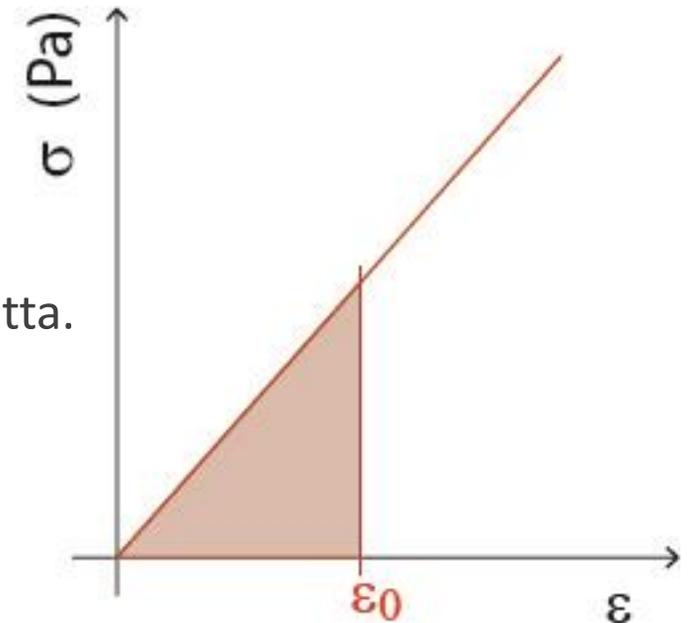
Il lavoro che devo compiere per fare allungare una barretta di lunghezza  $l$  di  $dx$  è pari a  $dL = Fdx$ ; per unità di volume della mia ho quindi:

$$\frac{dL}{V} = d\mathcal{U} = \frac{F}{V} dx$$

Ma, come abbiamo visto,  $\sigma = \frac{F}{S} = E\varepsilon$  e  $d\varepsilon = \frac{dx}{l}$  da cui

$$\mathcal{U} = \int_0^{\Delta l} \frac{F}{V} dx = E \int_0^{\varepsilon_0} \varepsilon d\varepsilon = \frac{1}{2} E \varepsilon_0^2 = \frac{1}{2} \sigma \varepsilon_0$$

che rappresenta l'energia potenziale elastica immagazzinata nella barretta.



# Legge di Poisson

Se un corpo è soggetto ad una trazione, oltre ad una elongazione nella direzione di azione della forza, si osserva una riduzione delle dimensioni trasverse (viceversa nel caso di compressione).

Se si considera un cilindro di lunghezza  $L$  e raggio  $r$ , si osserva, nei limiti di elasticità del materiale che:

$$\frac{\Delta r}{r} = -\nu \frac{\Delta L}{L} \quad \text{dove } \nu \text{ – Coefficiente di Poisson}$$

Per volumi costanti:

$$\Delta[(\pi r^2)L] = 0 \implies 2\pi r \Delta r L = -2\pi r^2 \Delta L \implies \frac{\Delta r}{r} = -\frac{1}{2} \frac{\Delta L}{L}$$

Ovvero  $\nu = 0.5$ . Sperimentalmente  $\nu \leq 0.5$ , con  $\nu = 0.5$  per materiali perfettamente elastici quale il caucciù.

Materiale	$\nu$	Materiale	$\nu$
Vetro	0.25	Rame	0.34
Ferro	0.30	Piombo	0.40
Acciaio	0.30	Caucciù	0.50

# Sforzi da dilatazione termica

Un materiale non vincolato subisce una dilatazione (compressione) termica al crescere (decrescere) della temperatura.

$$\frac{\Delta L}{L} = \alpha \Delta T$$

Con il coefficiente di dilatazione termica  $\alpha$  (misurato in  $K^{-1}$ ) è caratteristica del materiale. Lo sforzo che tale materiale è in grado di esercitare, se soggetto a vincolo, è pari a:

$$\sigma = E\varepsilon = E \frac{\Delta L}{L} = E\alpha\Delta T$$

Per l'acciaio, ciò corrisponde ad uno sforzo pari a  $\sigma = 2.1 \times 10^{11} \cdot 1.2 \times 10^{-5} = 2.3 \text{ MPa/K}$

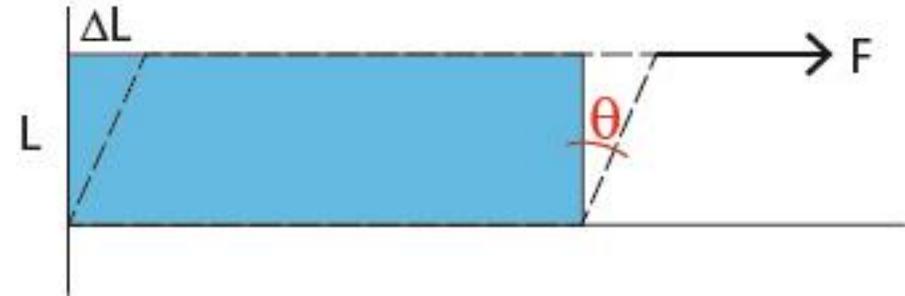
Materiale	$\alpha$	Materiale	$\alpha$
Vetro	$9 \times 10^{-6}$	Rame	$17 \times 10^{-6}$
Ferro	$12 \times 10^{-6}$	Alluminio	$23 \times 10^{-6}$
Acciaio	$12 \times 10^{-6}$	Piombo	$29 \times 10^{-6}$

# Scorrimento

Se una forza è applicata parallelamente ad una superficie di un corpo, si parla di sollecitazione di taglio.

Il rapporto tra il modulo della forza e l'area della superficie sulla quale la forza agisce, prende il nome di sforzo di taglio.

Uno sforzo di taglio tende a provocare una deformazione per scorrimento.



Nei limiti di elasticità del materiale, la legge di Hooke per sforzi di taglio prende la forma di

$$\sigma = \frac{\Delta L}{L} = G \theta$$

Dove  $G$  è il **modulo di rigidità o di taglio**.  $G$  è legato al modulo di Young del materiale da

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$

Materiale	$G$ (Pa)	Materiale	$G$ (Pa)
Vetro	$25 \div 32 \times 10^9$	Rame	$40 \times 10^9$
Ferro	$80 \times 10^9$	Alluminio	$25 \times 10^9$
Acciaio	$85 \times 10^9$	Piombo	$34 \times 10^9$

# Esempio numerico

---

Vogliamo provocare uno scorrimento di  $\Delta L = 1 \mu m$ , su una barra alta  $L = 2 \text{ cm}$  di alluminio, e con una superficie pari a  $20 \text{ cm}^2$  e dobbiamo quindi calcolare la forza che dobbiamo esercitare

$$\sigma = G \frac{\Delta L}{L} = 25 \times 10^9 \frac{10^{-6}}{2 \times 10^{-2}} = 12.5 \times 10^5 \text{ Pa}$$

Ovvero  $F = \sigma S = 12.5 \times 10^5 \cdot 2 \times 10^{-3} = 2500 \text{ N}$

# Torsione

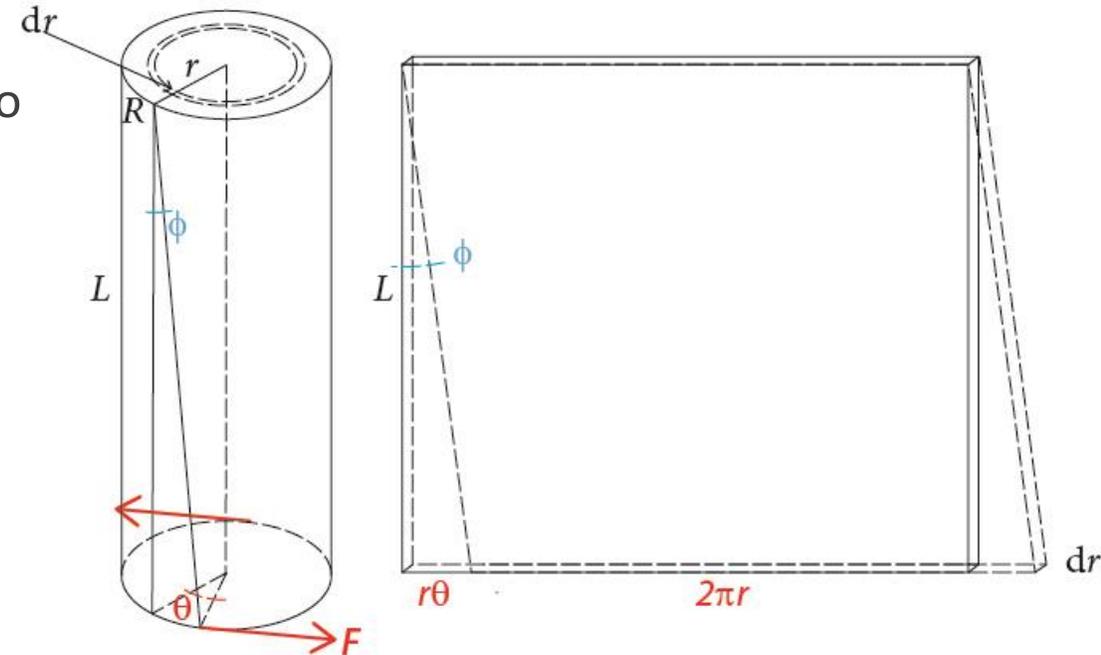
Se si considera un cilindro, e si applica un momento torcente ad una base, mentre l'altra è mantenuta vincolata, si ha una deformazione per torsione. Se il momento è modesto, il cilindro torna nella posizione iniziale una volta che la sollecitazione cessa.

Per effetto della torsione, la base ruota di un angolo  $\theta$ . Nei limiti di elasticità Hookiana del materiale si osserva proporzionalità tra il momento applicato  $M$  e l'angolo di rotazione  $\theta$

$$M = k\theta$$

Dove la costante di proporzionalità  $k$  è legata al modulo di rigidità del materiale e alle sue caratteristiche Geometriche. La torsione è apprezzabile se  $R$  è piccolo e  $L$  è grande, ossia per oggetti filiformi.

Per calcolare la relazione tra  $M$  e  $\theta$  nell'ipotesi di filo cilindrico, immaginiamo di sviluppare la corona circolare come un parallelepipedo di altezza  $L$ , base  $2\pi r$  e spessore  $dr$ .



# Torsione

Si consideri una corona cilindrica di raggio  $r \leq R$  e spessore  $dr$ : se si immagina di sviluppare questa corona su di un piano si ottiene un parallelepipedo con dimensioni  $2\pi r \times dr \times L$ . Per effetto della torsione, una base (quella inferiore nella figura) scorre di una quantità  $r\theta$  rispetto all'altra. Lo sforzo applicato è pari a:

$$\sigma = \frac{dF}{2\pi r dr}$$

Per definizione di **Modulo di Rigidity** di torsione  $G$  si ha

$$\sigma = G \frac{\Delta L}{L} = G\phi$$

Ma  $\Delta L = r\theta$ , per cui possiamo scrivere

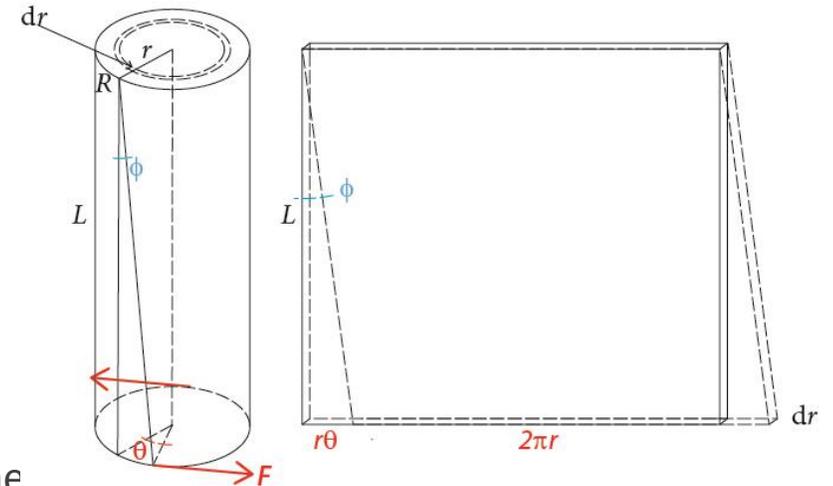
$$G = \frac{\sigma}{\phi} = \frac{L dF}{2\pi r \Delta L dr} = \frac{L dF}{2\pi \theta r^2 dr}$$

Dobbiamo ora integrare su tutto il raggio del filo, per ottenere la forza (o meglio il momento) applicata:

$$dM = r dF = G \frac{2\pi \theta r^3}{L} dr \Rightarrow M = G \frac{2\pi \theta}{L} \int_0^R r^3 dr = G \frac{2\pi R^4}{4L} \theta$$

Da cui  $k = G \frac{2\pi R^4}{4L}$ . A partire da  $G$  viene anche introdotto il **modulo di Coulomb**  $\mu = \frac{\pi G}{2}$

$$\Rightarrow M = \mu \frac{R^4}{L} \theta$$



# Esempio numerico

---

Il modulo di Coulomb dell'acciaio è  $\mu \sim 10^{11} \text{ Pa}$ . Il momento necessario per far ruotare un filo del diametro di  $200 \mu\text{m}$  e della lunghezza di  $1 \text{ m}$  di un angolo  $\theta = 1 \text{ mrad}$  (1 mm ad 1 metro) è pari a

$$M = \mu \frac{R^4}{L} \theta = 10^{11} \times \frac{(100 \times 10^{-6})^4}{1} \times 10^{-3} = 10^{-8} \text{ N} \cdot \text{m}$$

Se all'estremità' del filo monto un piattello con braccia da  $1 \text{ m}$ , la forza da applicare per avere questo momento e' pari a:

$$F = 10^{-8} \text{ N}$$

Se immagino di avere 2 masse da  $100 \text{ g}$  all'estremità di braccia da  $1 \text{ m}$  appese al filo, e due masse da  $10 \text{ kg}$  a  $10 \text{ cm}$  da loro, l'attrazione gravitazionale tra le coppie di masse è:

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2} = 7 \times 10^{-11} \times \frac{0.1 \times 10}{0.1^2} \sim 10^{-8} \text{ N}$$

# Momento torcente:

Il momento esterno che abbiamo applicato per torcere il filo di  $\theta$  attorno al proprio asse è

$$W = \int_0^{\theta} M d\theta' = \frac{1}{2} k \theta^2$$

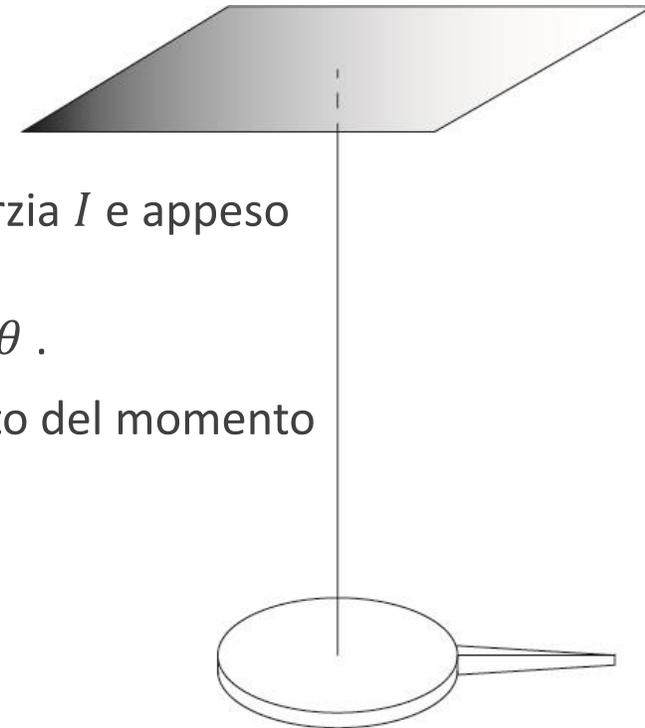
Questo lavoro è immagazzinato nel cilindro come energia potenziale elastica.

Si può realizzare in questo modo il pendolo di torsione:

- Un filo è fissato ad un'estremità al soffitto ed un oggetto di momento di inerzia  $I$  è appeso all'estremo libero.
- Per ruotare l'oggetto di un angolo  $\theta$  occorre applicare un momento  $M = k\theta$ .
- Quando l'oggetto viene lasciato libero, esso entrerà in oscillazione per effetto del momento meccanico reattivo  $-k\theta$  esercitato dal filo.
- Le oscillazioni sono descritte dalla seconda equazione cardinale del moto

$$M = I \frac{d^2\theta}{dt^2}, \quad \text{con} \quad \vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt} \quad \text{ed} \quad \vec{L} = I\vec{\omega}$$

Dove  $I$  è il momento d'inerzia scritto come  $I = \int_0^m r^2 dm$



# Momento torcente:

---

Possiamo quindi scrivere

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{k}{I}\theta = 0$$

Che ha come soluzione (esatta)

$$\theta(t) = \theta_0 \sin\left(\sqrt{\frac{k}{I}}t + \frac{\pi}{2}\right)$$

Il periodo di oscillazione del pendolo è quindi

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{k}} = 2\pi \sqrt{\frac{LI}{\mu R^4}}$$

$$T^2 = 4\pi^2 \frac{LI}{\mu R^4}$$



0

# Momento d'inerzia

---

Il momento d'inerzia di un disco di massa  $M$  e raggio  $R$  e altezza  $h$  è

$$I = \int_0^M r^2 dm = 2\pi\rho h \int_0^R r^3 dr = \frac{\pi\rho h}{2} R^4 = \frac{M}{2} R^2$$

Mentre per la corona circolare ottengo

$$I = \int_0^M r^2 dm = 2\pi\rho h \int_{R_i}^{R_e} r^3 dr = \frac{2\pi\rho h}{4} (R_f^4 - R_i^4) = \frac{\rho h \pi (R_f^2 - R_i^2)}{2} (R_f^2 + R_i^2) = \frac{M}{2} (R_f^2 + R_i^2)$$

Ad esempio per 2 corone circolari di 200g, entrambi con un diametro interno di 2 cm ed uno esterno rispettivamente di 4 e 6 cm ho:

$$I_4 = 50 \times 10^{-6} \text{ (kg m}^2\text{)} \text{ e } I_6 = 100 \times 10^{-6} \text{ (kg m}^2\text{)}$$

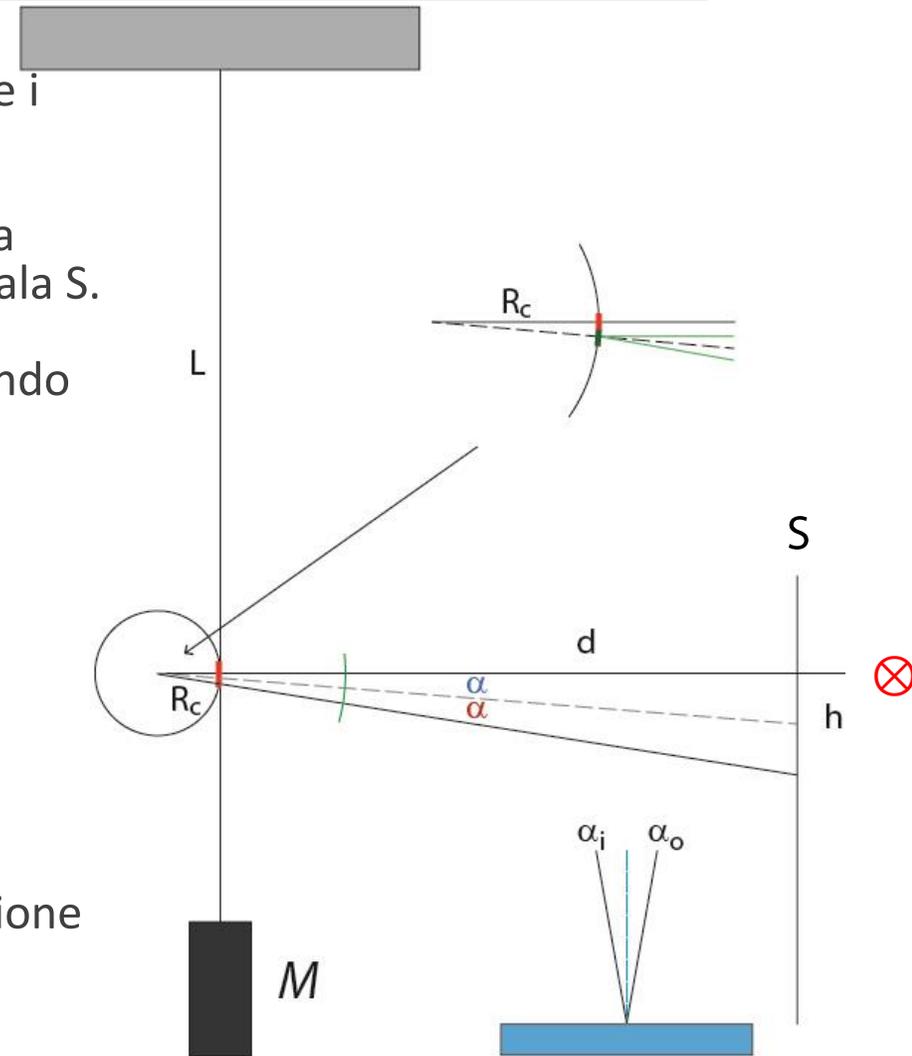
MA NON CONSCIAMO IL MOMENTO D'INERZIA COMPLETO DEL SISTEMA

# Modulo di Young – Setup

Per la misura del modulo di Young dell'acciaio usiamo il principio della leva ottica (figura a lato) che permette di amplificare i piccoli effetti dell'allungamento del filo.

Per creare la leva ottica usiamo una sorgente luminosa  $\otimes$  posta alla stessa altezza dello specchio sul cilindro, ad una distanza  $d$  dalla scala  $S$ . Il filo e' vincolato all'estremo superiore, ed avvolto su un cilindro (tangente lungo la verticale) ad una distanza  $L$  dal vincolo. Applicando una forza di trazione  $Mg$  provochiamo l'allungamento del filo.

- $D_f$  diametro del filo
- $R_c$  raggio del cilindro
- $L$  lunghezza del filo fino al cilindro
- $M$  massa appesa al filo
- $S$  scala graduata
- $d$  distanza specchio/scala graduata
- $h$  spostamento dello spot luminoso successivo all'applicazione di  $Mg$
- $\alpha$  angolo di rotazione del cilindro



# Modulo di Young – Setup

Ricordando che  $\sigma = E\varepsilon$ . Scriviamo

$$\frac{F}{S_f} = E \frac{\Delta L}{L}$$

Ora, per il set-up che abbiamo realizzato abbiamo

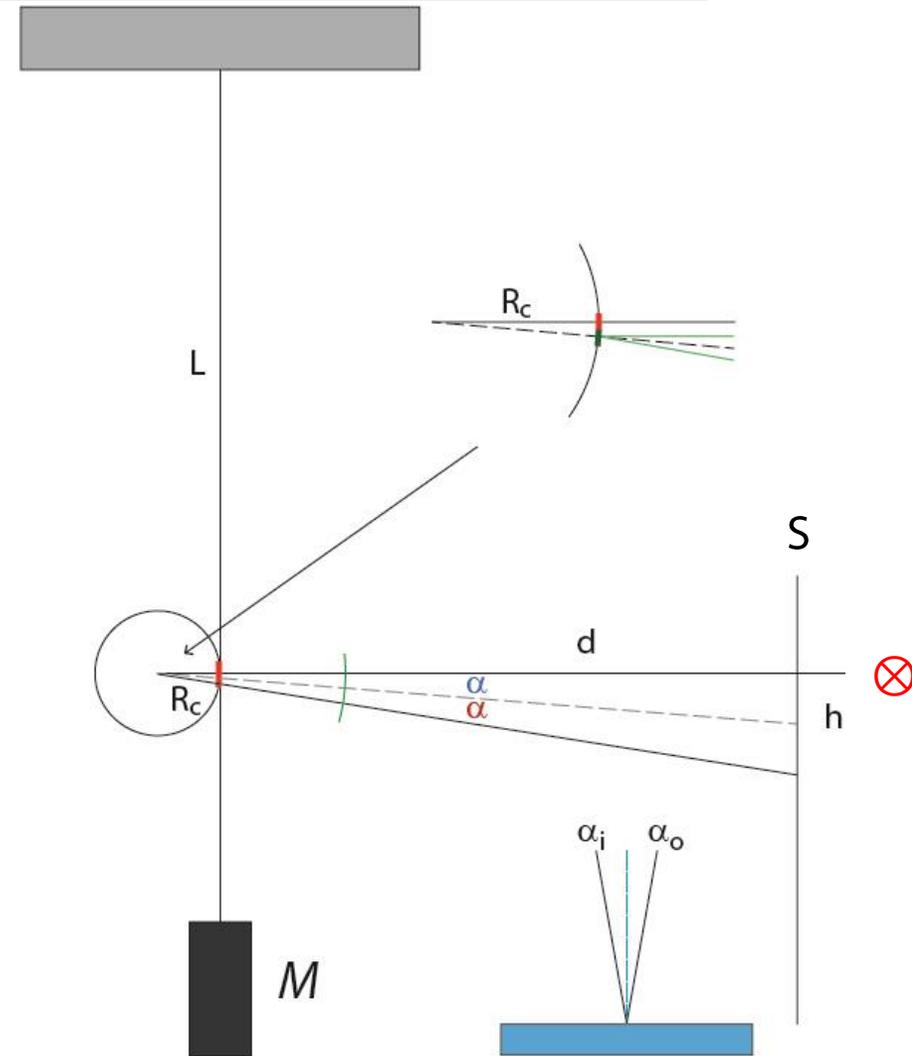
- $\Delta L = R_c \alpha = R_c \frac{1}{2} \tan^{-1} \frac{h}{d}$
- $F = Mg$
- $S_f = \pi(D_f/2)^2$

Che ci permette di ricavare il modulo di Young  $E$  in funzione di quantità misurabili

$$E = \frac{8gL}{\pi R_c D_f^2} \cdot \frac{M}{\tan^{-1} \frac{h}{d}}$$

Per piccoli angoli  $\tan \alpha \approx \alpha$ , possiamo scrivere  $\tan^{-1} \frac{h}{d} \approx \frac{h}{d}$

$$E = \frac{8gLd}{\pi R_c D_f^2} \cdot \frac{M}{h}$$



# Modulo di Young – Errori

Per valutare  $E$  eseguiamo misure con diverse masse  $M_i$  che risultano in diverse altezze  $h_i$

$$E_i = \frac{8gLd}{\pi R_c D_f^2} \cdot \frac{M_i}{h_i}$$

Abbiamo solo errori di sensibilità di cui una parte

$$A = \frac{8gLd}{\pi R_c D_f^2}$$

Non varia da misura a misura mentre una parte

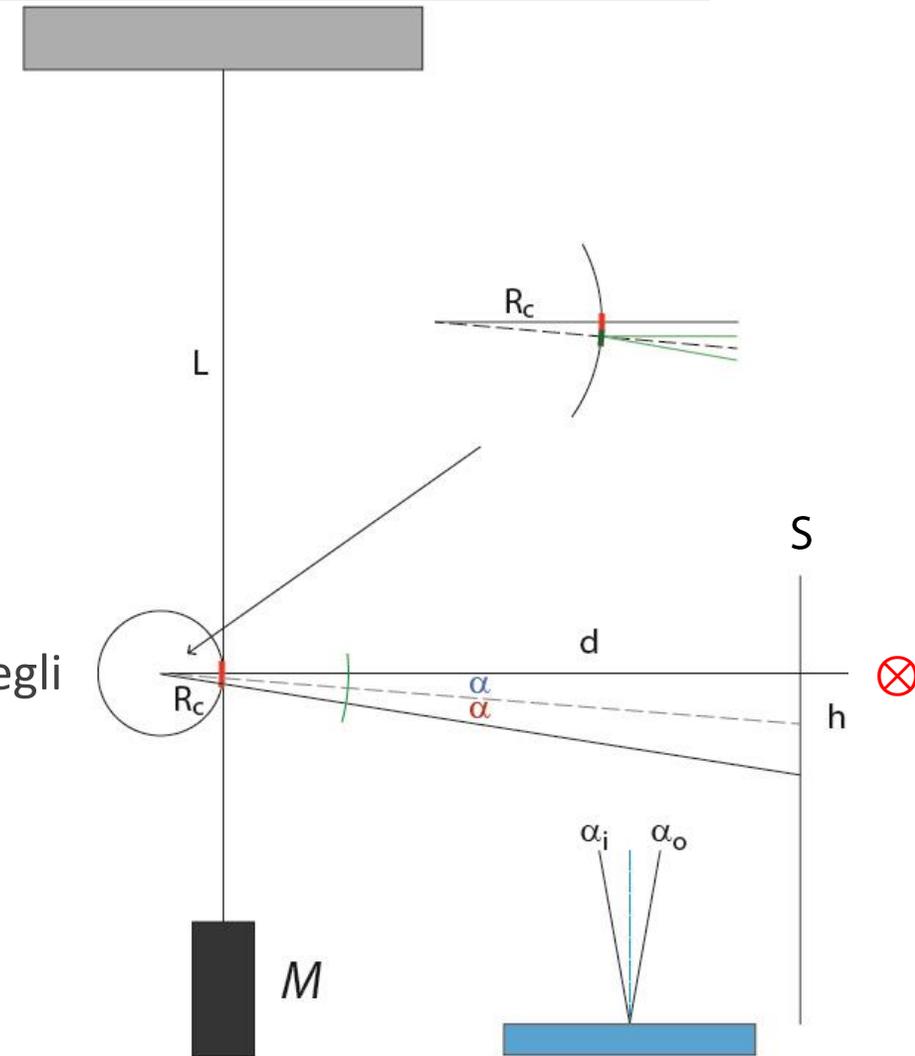
$$B_i = \frac{M_i}{h_i}$$

Cambia da misura a misura. Possiamo usare la propagazione degli errori massimi relativi

$$\frac{\Delta A}{A} = \frac{\Delta g}{g} + \frac{\Delta L}{L} + \frac{\Delta d}{d} + \frac{\Delta R_c}{R_c} + 2 \frac{\Delta D_f}{D_f}$$

e

$$\frac{\Delta B_i}{B_i} = \frac{\Delta M_i}{M_i} + \frac{\Delta h_i}{h_i}$$



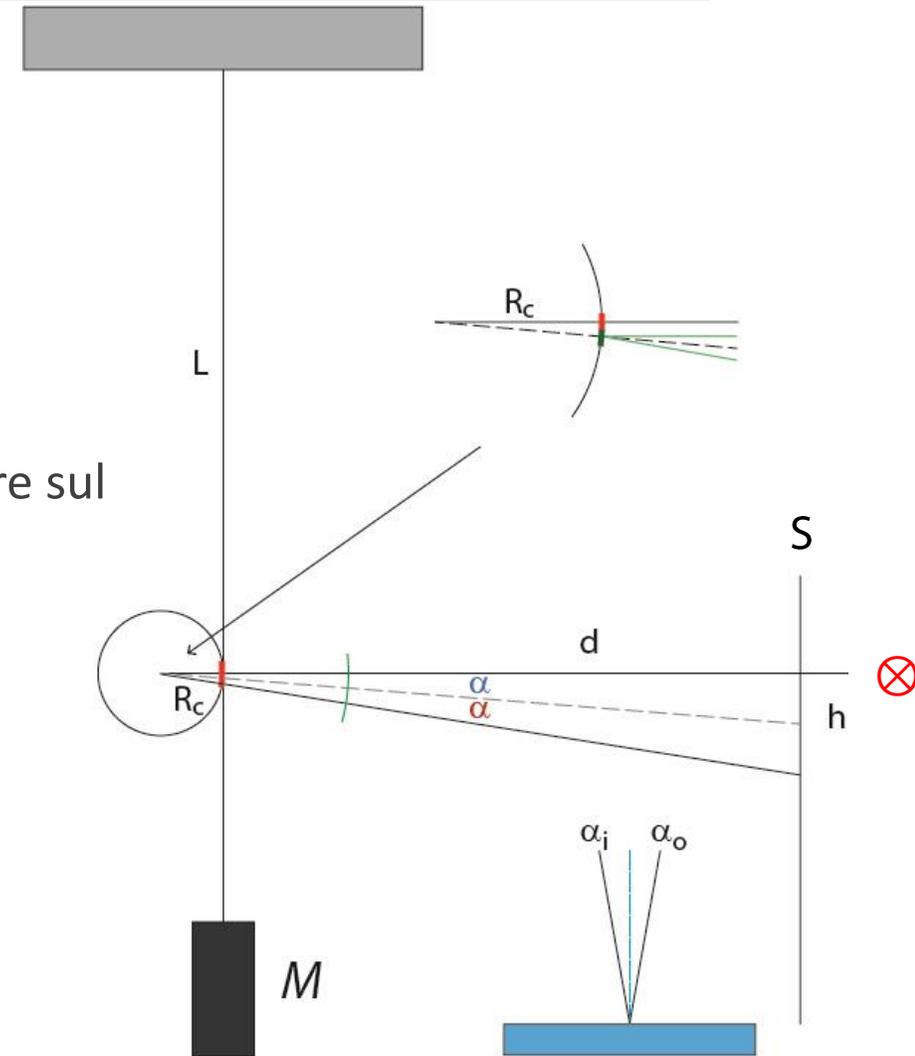
# Modulo di Young – Errori

Le misure con masse diverse possono essere usate per una miglior stima di  $B$  ovvero

$$B = \frac{\sum_{i=1}^n \frac{B_i}{\Delta B_i^2}}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{\Delta B_i^2}} \quad e \quad \Delta B^2 = \frac{1}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{\Delta B_i^2}}$$

Quindi alla fine il modulo di Young è dato da  $E = A \cdot B$  e l'errore sul modulo di Young è dato da

$$\Delta E = E \left( \frac{\Delta A}{A} + \frac{\Delta B}{B} \right)$$



# Modulo di Young – Grafici

Grafici:  $\Delta L_i$  vs  $M_i$   
 $B_i$  vs  $M_i$

Strumenti:	$L, d$ ed $h$	Metro lineare	$\Delta x_i = 0.5 \times 10^{-3} \text{ m}$
	$R_c$	Calibro ventesimale	$\Delta R_c = 2.5 \times 10^{-5} \text{ m}$
	$D_f$	Calibro Palmer	$\Delta D_f = 0.5 \times 10^{-5} \text{ m}$
	$M_i$	Bilancia	$\Delta M_i = 0.5 \times 10^{-3} \text{ g}$

Limite elastico acciaio:  $2 \div 4 \times 10^8 \text{ Pa}$

La posizione di 0 deve essere alla stessa altezza dello specchio e della luce. Ruotare il cilindro per ottenerla

Il filo deve essere teso per non scorrere  $\Rightarrow$  pre caricare con 50-100 g il piattello

Verificare che al rimuovere della massa  $M_i$  ritroviamo la posizione di 0

# Modulo di Coulomb – Set-up

Per la misura del modulo di Coulomb dell'acciaio usiamo il pendolo di torsione, come illustrato in figura.

Non conosciamo il momento d'inerzia  $I_0$  del sistema del piattello, mentre sappiamo calcolare quello della corona circolare che può essere montata per oscillare sullo stesso asse del piattello (asse del filo).

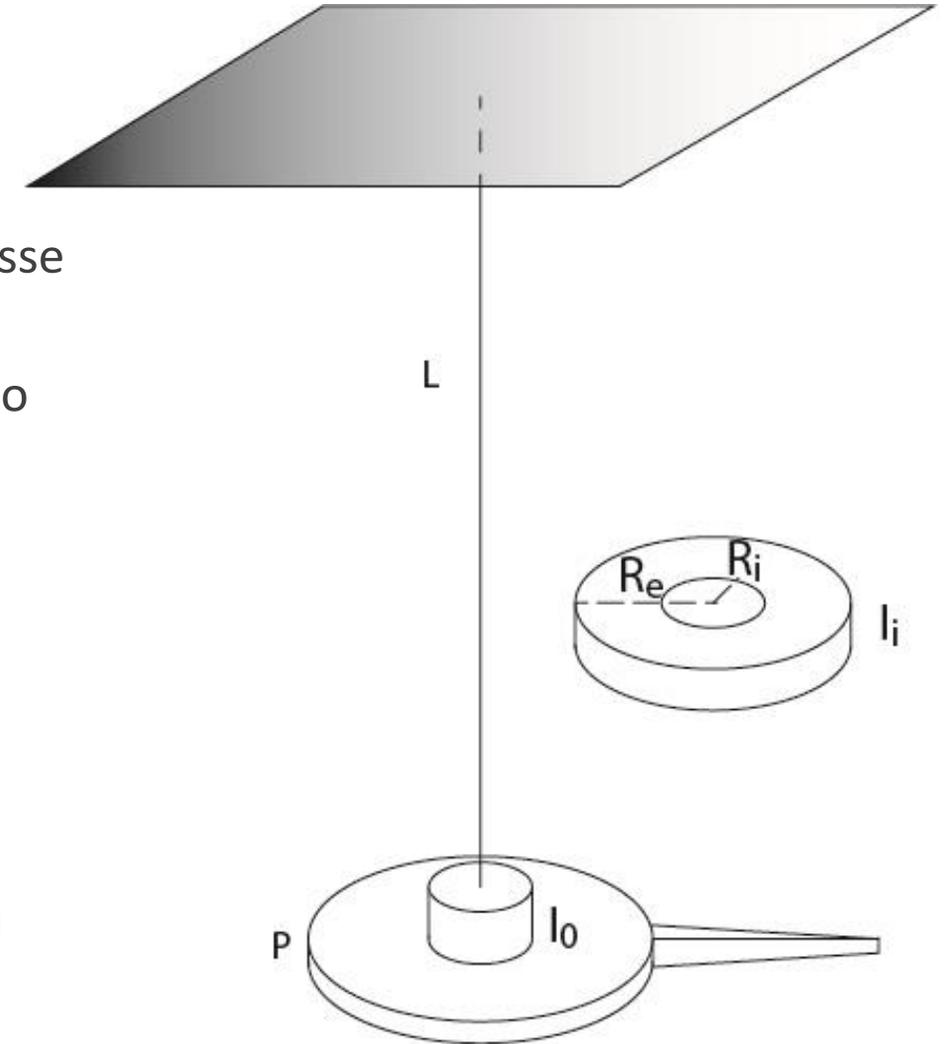
Possiamo però misurare il periodo di oscillazione del piattello scarico e del piattello caricato con la corona circolare, che varranno

$$T_0^2 = 4\pi^2 \frac{LI_0}{\mu R^4} \quad e \quad T_i^2 = 4\pi^2 \frac{L(I_0 + I_i)}{\mu R^4}$$

Vale quindi

$$T_i^2 - T_0^2 = 4\pi^2 \frac{LI_i}{\mu R^4}$$

Che permette di calcolare il modulo di Coulomb a partire da quantità misurabili



# Modulo di Coulomb – Set-up

Il modulo di Coulomb vale quindi

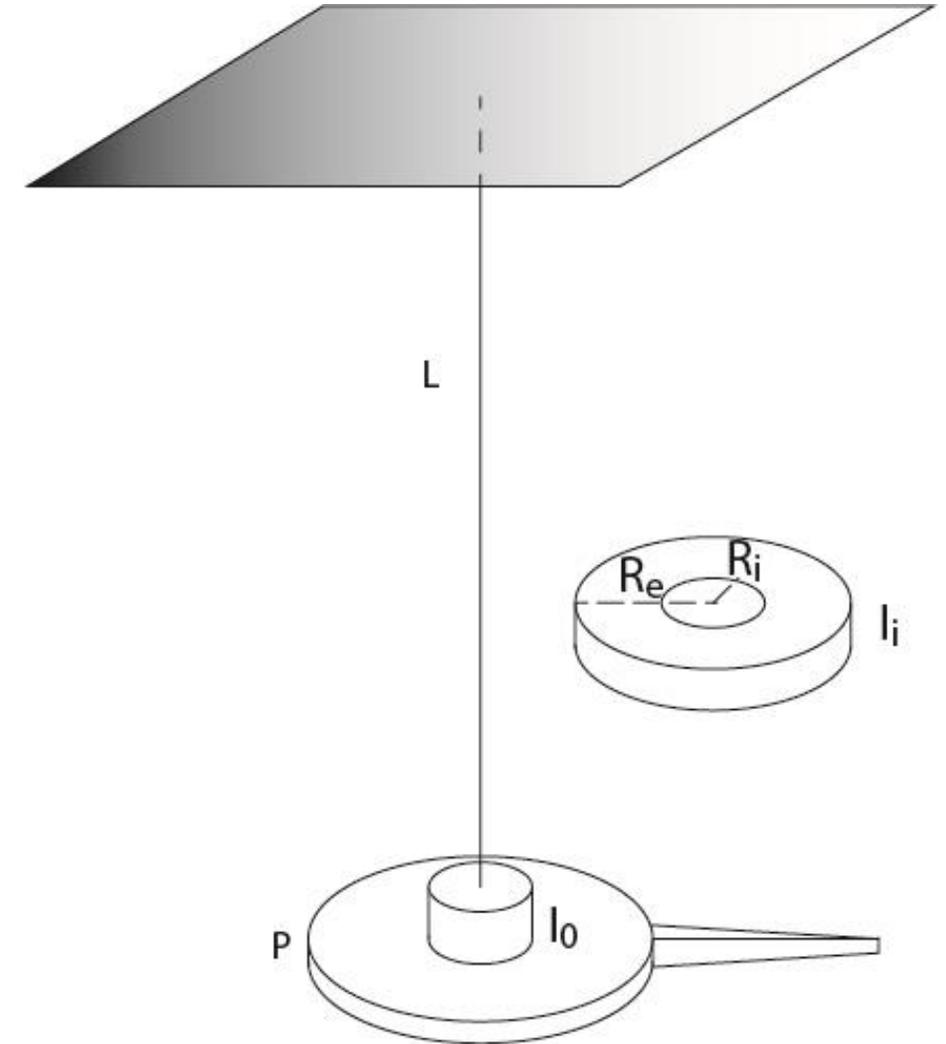
$$\mu = 4\pi^2 \frac{L}{R^4} \cdot \frac{I_i}{T_i^2 - T_0^2}$$

Scrivendo esplicitamente il momento d'inerzia abbiamo

$$\mu = 4\pi^2 \frac{L}{(D_f/2)^4} \cdot \frac{((D_e/2)^2 + (D_i/2)^2)_i \cdot M_i}{T_i^2 - T_0^2}$$

Con:

- P piattello di momento d'inerzia incognito  $I_0$
- $L$  lunghezza del filo
- $D_f$  diametro del filo d'acciaio
- $T_0$  e  $T_i$  periodi d'oscillazione
- $\mu$  modulo di Coulomb in  $Pa$  o  $(N m^{-2})$



# Misura di $T$

---

Come nel caso del pendolo

Misurare  $\tau = 4 \div 6T = t_{stop} - t_{start}$  per ogni lunghezza corona circolare e ripetere la misura allo stesso modo a piatto scarico.

- Misurare  $\tau = 4 \div 6T = t_{stop} - t_{start}$  per almeno 10 volte (slide 74) per ogni corona circolare.
- Misurare  $\tau_0 = 4 \div 6T = t_{stop} - t_{start}$  (piatti scarichi) per almeno 10 volte (slide 74) per ogni corona circolare in modo da avere misure indipendenti.
- Per la trattazione statistica che abbiamo visto i risultati seguono una distribuzione Gaussiana.
  - La miglior stima del valore vero di  $\tau$  è il valor medio  $\bar{\tau} = \sum_{i=1}^{10} \tau_i$
  - La miglior stima della varianza della singola misura  $\tau_i$  è data da  $\sigma_{\tau_i}^2 = \frac{1}{10-1} \sum_{i=1}^{10} (\tau_i - \bar{\tau})^2$
  - La miglior stima della varianza della media è data da  $\sigma_{\bar{\tau}}^2 = \frac{\sigma_{\tau_i}^2}{10}$
  - Abbiamo quindi  $\bar{\tau} \pm \sigma_{\bar{\tau}}$ .
  - Tenuto conto che  $\bar{T} = \bar{\tau}/5$  e che  $\sigma_{\bar{T}} = \sigma_{\bar{\tau}}/5$  abbiamo anche misurato  
$$\bar{T} \pm \sigma_{\bar{T}}$$

# Modulo di Coulomb – Errori

Data la misura del modulo di Coulomb

$$\mu = 4\pi^2 \frac{L}{(D_f/2)^4} \cdot \frac{((D_e/2)^2 + (D_i/2)^2)_i \cdot M_i}{T_i^2 - T_0^2}$$

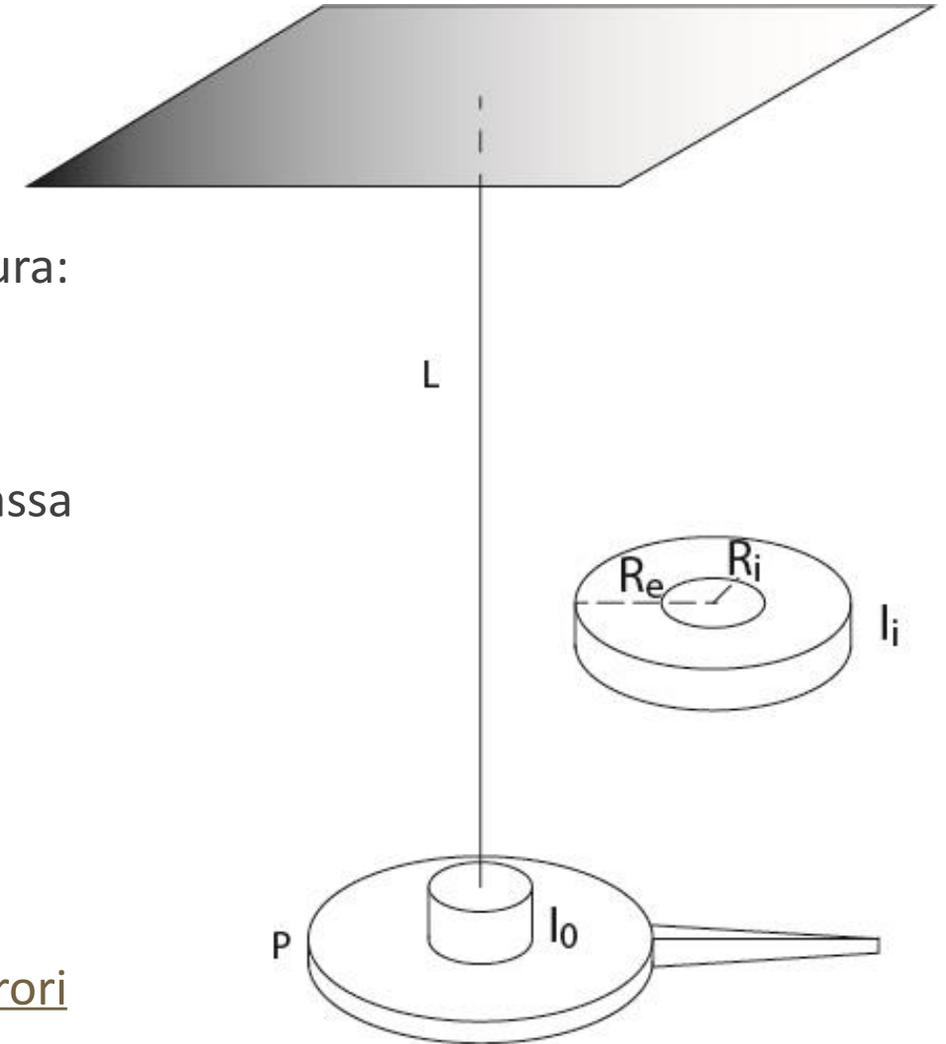
Abbiamo due contributi che non cambiano da misura a misura:

$$A = \frac{L}{(D_f/2)^4}, \text{ con errori } \frac{\Delta A}{A} = \frac{\Delta L}{L} + 4 \frac{\Delta D_f}{D_f}$$

E contributi che cambiano per diverse corone circolari di massa  $M_i$  (da notare che se le corone circolari hanno gli stessi diametri, questa parte va aggiunta in  $A$  e non in  $B$ )

$$B = \frac{((D_e/2)^2 + (D_i/2)^2)_i \cdot M_i}{T_i^2 - T_{0i}^2}, \text{ con errori } \frac{\Delta B}{B} = \frac{\Delta M_i}{M_i} + \frac{\Delta((D_e/2)^2 + (D_i/2)^2)_i}{((D_e/2)^2 + (D_i/2)^2)_i} + \frac{\Delta(T_i^2 - T_{0i}^2)}{T_i^2 - T_{0i}^2}$$

Propagati come errori massimi (nell'ipotesi che siano gli errori dominanti)



# Modulo di Coulomb – Errori

Dove

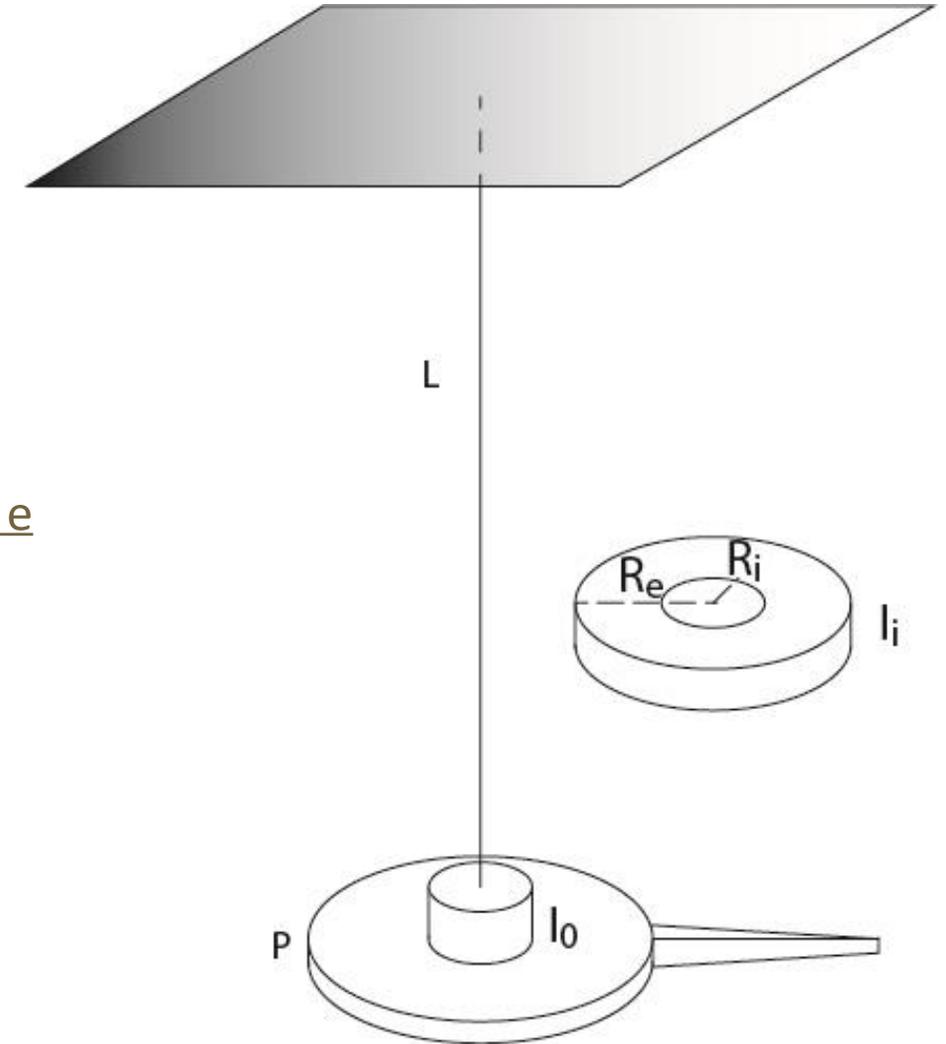
$$\Delta\left(\left(D_e/2\right)^2 + \left(D_i/2\right)^2\right)_i = \left(D_e\Delta D_e + D_i\Delta D_i\right)_i$$

e dove

$$\Delta\left(T_i^2 - T_{0i}^2\right) = 2T_i\Delta T_i + T_i2T_{0i}\Delta T_{0i}$$

e con l'errore massimo sul periodo ottenuto da  $\Delta T_i = 3\sigma_{T_i}$

Nel caso i termini dominanti nell'errore siano statistici trasformare tutti gli errori massimi in deviazioni standard e usare la legge di propagazione della varianza



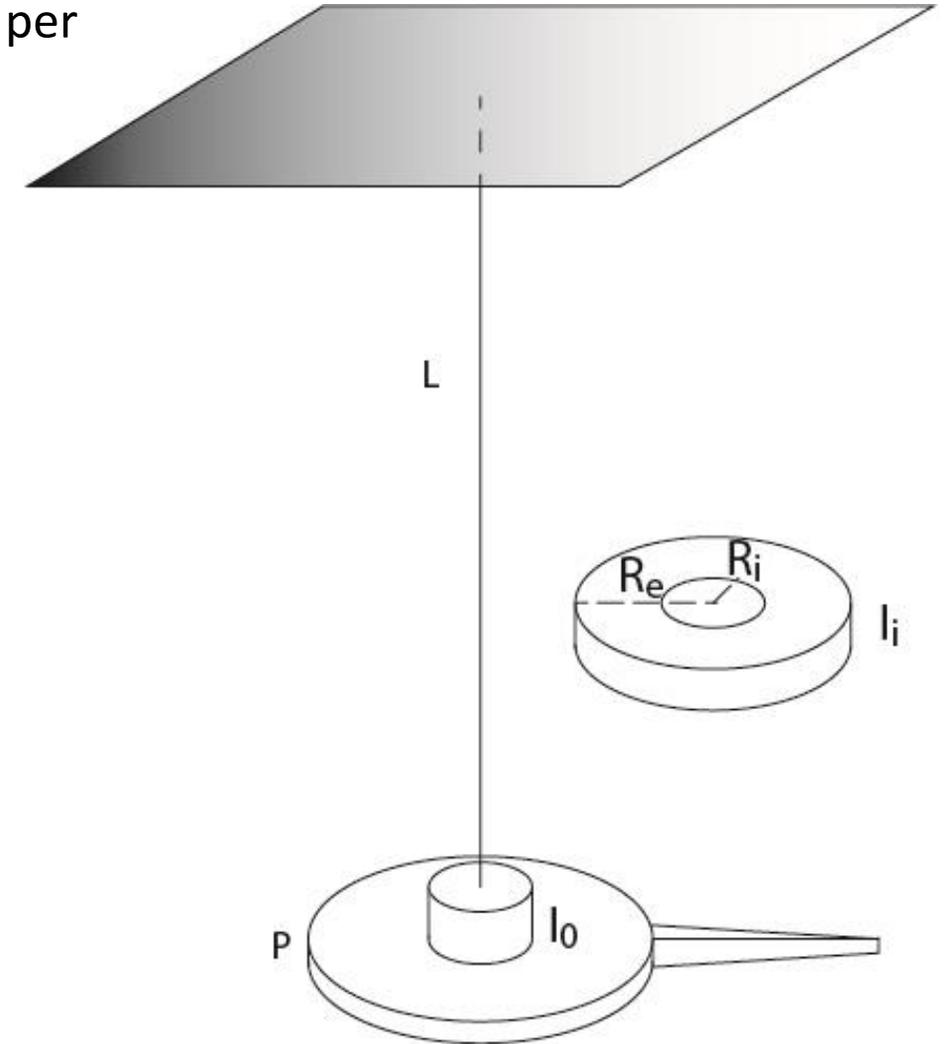
# Modulo di Coulomb – Errori

Come per il modulo di Young, posso usare le diverse misure per ottenere la miglior stima di  $B$

$$B = \frac{\sum_{i=1}^n \frac{B_i}{\Delta B_i^2}}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{\Delta B_i^2}} \quad e \quad \Delta B^2 = \frac{1}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{\Delta B_i^2}}$$

Quindi alla fine il modulo di Coulomb è dato da  $\mu = A \cdot B$  e l'errore sul modulo di Coulomb è dato da

$$\Delta\mu = \mu \left( \frac{\Delta A}{A} + \frac{\Delta B}{B} \right)$$



# Modulo di Coulomb – Grafici

---

Grafici:  $T_i^2 - T_{0i}^2$  vs  $I_i$   
 $B_i$  vs  $I_i$

Strumenti:	$L$	Metro lineare	$\Delta x_i = 0.5 \times 10^{-3} \text{ m}$
	$R_e, R_i$	Calibro ventesimale	$\Delta R_i = 2.5 \times 10^{-5} \text{ m}$
	$D_f$	Calibro Palmer	$\Delta D_f = 0.5 \times 10^{-5} \text{ m}$
	$M_i$	Bilancia	$\Delta M_i = 0.5 \times 10^{-3} \text{ g}$

# Slides

---

TROVATE LE SLIDE AGGIORNATE SULLA PAGINA MOODLE2 DEL CORSO

<http://moodle2.units.it/course/view.php?id=315>

Nelle news del forum

<http://moodle2.units.it/mod/forum/discuss.php?d=460>