ISTITUZIONI DI ANALISI E GEOMETRIA
113SM-1 - MODULO A
PROGRAMMA
PROF. G. ALESSANDRINI

Prerequisiti: Calcolo differenziale ed integrale su $\mathbb{R}^n$. Spazi metrici.

Teoria della misura. Algebre e σ-algebre di insiemi. Spazi di misura. Misure finite e σ-finite. Misure complete, completamento di una misura. Nozione di misura esterna. σ-algebra degli insiemi misurabili e misura generata dalla misura esterna. Misura esterna di Lebesgue su $\mathbb{R}^n$ e misura di Lebesgue. Misura su un algebra e misura esterna indotta. Caratterizzazione degli insiemi misurabili. Teorema di estensione di Caratheodory. Misura su una semialgebra.

Integrazione. Funzioni misurabili. Funzioni semplici. Approssimazione delle funzioni misurabili con funzioni semplici. Convergenza quasi uniforme. Teorema di Egorov-Severini. Convergenza in misura, e convergenza alla Cauchy in misura. Approssimazione in misura di funzioni misurabili su $\mathbb{R}^n$ con funzioni a scalino e continue. Teorema di Lusin. Integrale per funzioni semplici e per funzioni non-negative misurabili. Lemma di Fatou. Teorema della convergenza monotona, sue conseguenze. Integrale di funzioni di segno variabile. Teorema di convergenza dominata e sue conseguenze. Disuguaglianza di Chebyshev. Assoluta continuità dell'integrale. Teorema di derivazione sotto il segno di integrale. Confronto tra integrale di Lebesgue sulla retta, integrale di Riemann e integrali impropri. Costruzione di misure prodotto. Principio di Cavalieri. Teorema di Fubini e Teorema di Tonelli. Misura prodotto su $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$. Funzione distribuzione, formula di area in $\mathbb{R}^n$. Misura su sottovarietà regolari di $\mathbb{R}^n$.

Spazi L^p. Disuguaglianze di Young, Hölder, Minkowsky. Spazi L^p. Convergenza in L^p e convergenza in misura. Densità in L^p delle funzioni semplici nulle fuori da insiemi di misura finita. Caratterizzazione duale della norma L^p, varie versioni. Completezza degli spazi L^p (teorema di Riesz-Fisher). Disuguaglianza di Minkowski integrale e per serie, monotonia della norma e proprietà di limite per p tendente all'infinito. Disuguaglianza interpolatoria. Separabilità di $L^p(\mathbb{R}^n)$ $p < \infty$. Non separabilità di $L^\infty(\mathbb{R}^n)$. Continuità in $L^p(\mathbb{R}^n)$. Disuguaglianza di Young per convoluzioni, nuclei mollificatori. Approssimazione con funzioni lisce in $L^p(\mathbb{R}^n)$. Teorema di rappresentazione di Riesz (solo enunciato).

Testi consigliati.

E.H. Lieb, M. Loss, Analysis, American Mathematical Society, 1997.

H. L. Royden, Real Analysis, MacMillan, 1968.

A. Tesei, Istituzioni di Analisi Superiore, Bollati Boringhieri, 1997.

R. L. Wheeden, A. Zygmund, Measure and Integral, M. Dekker, 1977.