Appunti di Analisi Reale

Prof. Giovanni Alessandrini

Appunti redatti da:
Stefano Piani,
Matteo Gallet,
Marta Panizzut,
Gil Vegliach.

`versione corretta e aggiornata al`

27 settembre 2015

Indice

Capitolo 1

Algebre e Misure

La teoria elementare dell'integrazione ha varie, serie limitazioni, come ad esempio condizioni di passaggio al limite sotto al segno di integrale troppo restrittive. Si cerca pertanto di generalizzare l'idea di integrale, partendo da una nozione astratta di misura di un insieme. In questo modo si cerca quindi di dare un quadro generale all'interno del quale quale far rientrare la nozione intuitiva di misura.

1.1 Algebre e σ-algebre

Definizione 1.1. *Sia $\mathbb{X}$ un insieme, una collezione $\mathscr{A}$ di sottoinsiemi di $\mathbb{X}$ si dice un'algebra se verifica*

1. $\emptyset \in \mathscr{A}$
2. $\forall A, B \in \mathscr{A}, \quad A \cup B \in \mathscr{A}$
3. $\forall A \in \mathscr{A}, \quad \complement(A) \in \mathscr{A}$

Possiamo notare alcune caratteristiche delle algebre che sono diretta conseguenza dalle tre proprietà enunciate.

Proposizione 1.1. *In ogni algebra,* $\mathbb{X} \in \mathscr{A}$

Dimostrazione. Si ha infatti che $\mathbb{X} = \complement(\emptyset)$ e $\emptyset \in \mathscr{A}$, pertanto, essendo che $\forall A \in \mathscr{A}, \quad \complement(A) \in \mathscr{A}$ si ha che $\mathbb{X} \in \mathscr{A}$. □

Proposizione 1.2. *Se $\mathscr{A}$ è un'algebra e $A, B \in \mathscr{A}$, anche $A \cap B \in \mathscr{A}$.*

Dimostrazione. Anche questa proprietà si dimostra a partire dalle proprietà della definizione di algebra ricordando che, per le leggi di De Morgan:

$$A \cap B = \complement\big(\complement(A) \cup \complement(B)\big)$$

□

Teorema 1.3. *Una collezione $\mathscr{A}$ di sottoinsiemi di $\mathbb{X}$ è un algebra se e solo se valgono le seguenti proprietà:*

1. $\emptyset \in \mathscr{A}$
2. $\forall A, B \in \mathscr{A}, \quad A \cap B \in \mathscr{A}$
3. $\forall A \in \mathscr{A}, \quad \complement(A) \in \mathscr{A}$

Dimostrazione. La dimostrazione segue dalle leggi di de Morgan. □

Proposizione 1.4. *Sia $\mathscr{A}$ un'algebra e $A_1, \ldots, A_n \in \mathscr{A}$ allora*

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i \in \mathscr{A} \qquad e \qquad \bigcap_{i=1}^{n} A_i \in \mathscr{A}$$

Dunque un'algebra è una famiglia di insiemi chiusa rispetto ad unioni ed intersezioni finite.

Dimostrazione. La dimostrazione si ottiene per induzione unendo (o intersecando) ripetutamente gli insiemi. □

Teorema 1.5. *Sia Σ un insieme non vuoto di indici e siano $\mathscr{A}_\sigma$ con $\sigma \in \Sigma$ delle algebre su $\mathbb{X}$, allora $\mathscr{A} = \bigcap\limits_{\sigma \in \Sigma} \mathscr{A}_\sigma$ è anch'essa un'algebra su $\mathbb{X}$.*

Dimostrazione. Si verifica che $\mathscr{A}$ soddisfa le tre proprietà di un'algebra:

1.
$$\forall \sigma \in \Sigma,\ \emptyset \in \mathscr{A}_\sigma \quad \Rightarrow \quad \emptyset \in \bigcap_{\sigma \in \Sigma} \mathscr{A}_\sigma$$

2.
$$\begin{aligned} &\forall A, B \in \bigcap_{\sigma \in \Sigma} \mathscr{A}_\sigma, \ \text{ si ha che } \forall \sigma \in \Sigma,\ A, B \in \mathscr{A}_\sigma \quad \Rightarrow \\ &\Rightarrow \quad \forall \sigma \in \Sigma,\ A \cup B \in \mathscr{A}_\sigma \quad \Rightarrow \quad A \cup B \in \bigcap_{\sigma \in \Sigma} \mathscr{A}_\sigma \end{aligned}$$

3.
$$\begin{aligned} &\forall A \in \bigcap_{\sigma \in \Sigma} \mathscr{A}_\sigma \ \text{ si ha che } \forall \sigma \in \Sigma,\ A \in \mathscr{A}_\sigma \quad \Rightarrow \\ &\Rightarrow \quad \forall \sigma \in \Sigma,\ \complement(A) \in \mathscr{A}_\sigma \quad \Rightarrow \quad \complement(A) \in \bigcap_{\sigma \in \Sigma} \mathscr{A}_\sigma \end{aligned}$$

□

Teorema 1.6. *Sia $\mathcal{C}$ una famiglia di sottoinsiemi di $\mathbb{X}$. Allora esiste un'algebra $\mathscr{A}$ tale che*

1) $\mathcal{C} \subseteq \mathscr{A}$

2) $\forall \mathscr{B}$ *algebra su* $\mathbb{X}$ *tale che* $\mathcal{C} \subseteq \mathscr{B}$, *allora* $\mathscr{A} \subseteq \mathscr{B}$

Dimostrazione. Sia $\mathscr{F} \stackrel{\text{def}}{=} \{\mathscr{B} : \mathscr{B}$ è un'algebra su $\mathbb{X}$ e $\mathcal{C} \subseteq \mathscr{B}\}$. Allora $\mathscr{F} \neq \emptyset$ poiché $2^{\mathbb{X}}$ (l'insieme delle parti di $\mathbb{X}$) è un'algebra su $\mathbb{X}$ che contiene $\mathcal{C}$. Sia quindi $\mathscr{A} = \bigcap_{\mathscr{B} \in \mathscr{F}} \mathscr{B}$. Si ha che $\mathscr{A}$ è un'algebra che soddisfa alle due proprietà del teorema. □

Definizione 1.2. *L'algebra $\mathscr{A}$ individuata nel teorema precedente si dice algebra generata da $\mathcal{C}$. Essa è, nel senso dell'inclusione tra insiemi, la più piccola algebra contenente $\mathcal{C}$.*

Proposizione 1.7. *Sia $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ una successione di insiemi di un'algebra $\mathscr{A}$ su $\mathbb{X}$. Allora esiste una successione di insiemi $\{B_i\}_{i=1}^{\infty}$ con $B_i \in \mathscr{A}$ a due a due disgiunti, $B_i \subseteq A_i$ $\forall i$ e tale che $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$.*
Dunque un'unione numerabile di elementi di un'algebra è riscrivibile come unione numerabile disgiunta di elementi dell'algebra.

Dimostrazione. Definiamo la successione nel seguente modo:

$$B_1 \stackrel{\text{def}}{=} A_1$$

$$B_2 \stackrel{\text{def}}{=} A_2 \setminus A_1$$

$$\vdots$$

$$B_n \stackrel{\text{def}}{=} A_n \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i \right)$$

In questo modo $B_i \in \mathscr{A}$ $\forall i$, infatti $A \setminus B = A \cap \complement(B)$ (e quindi l'operazione $\setminus$ è interna all'algebra) e $B_i \subseteq A_i$ $\forall i$.
Dimostriamo ora che $\forall\, m, n \in \mathbb{N}$ con $m \neq n$ si ha che $B_n \cap B_m = \emptyset$. Supponiamo, senza ledere di generalità, che $m < n$. Da questo segue che $B_m \subseteq A_m$ mentre $B_n \subseteq \complement(A_m)$ perché $B_n = A_n \setminus \big(A_1 \cup \ldots \cup A_m \cup \ldots \cup A_{n-1}\big)$ e pertanto $B_m \cap B_n = \emptyset$.
Rimane ancora da dimostrare che $\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$. Poiché $B_i \subseteq A_i$ $\forall i$ si ha che $\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$. Sia allora $x \in \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$, ne consegue che esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $x \in A_n$, ma $x \notin A_j$, $\forall j < n$ (infatti basta considerare il minimo indice n, che esiste sempre, tale che $x \in A_n$). Dunque $x \in A_n \setminus \left(\bigcup_{j=1}^{n-1} A_j \right) = B_n$ e quindi $x \in \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$. □

Definizione 1.3. *Una famiglia $\mathscr{A}$ di sottoinsiemi di $\mathbb{X}$ si dice σ-algebra se è un'algebra e vale che*

$$\forall \{A_i\}_{i=1}^{\infty} \subseteq \mathscr{A}, \quad \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathscr{A}$$

Proposizione 1.8. *Sia* $\mathscr{A}$ *una* σ*-algebra, se* $\{A_i\}_{i=1}^{\infty} \subseteq \mathscr{A}$ *allora* $\displaystyle\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathscr{A}$.

Dunque le σ-algebre sono collezioni di insiemi chiuse rispetto alle iterazioni numerabili di unione ed intersezione.

Teorema 1.9. *Se* $\mathscr{A}_\sigma$, $\sigma \in \Sigma$ *è una famiglia di* σ*-algebre su* $\mathbb{X}$*, allora*

$$\mathscr{A} = \bigcap_{\sigma \in \Sigma} \mathscr{A}_\sigma$$

è una σ*-algebra su* $\mathbb{X}$.

Teorema 1.10. *Sia* $\mathcal{C}$ *una famiglia di sottoinsiemi di* $\mathbb{X}$*. Allora esiste una* σ*-algebra* $\mathscr{A}$ *tale che*

1) $\mathcal{C} \subseteq \mathscr{A}$

2) $\forall \mathscr{B}$ σ*-algebra su* $\mathbb{X}$ *tale che* $\mathcal{C} \subseteq \mathscr{B}$*, allora* $\mathscr{A} \subseteq \mathscr{B}$

Dimostrazione. La dimostrazione è analoga a quella del teorema 1.6 riguardo all'algebra generata. □

Definizione 1.4. *La* σ*-algebra* $\mathscr{A}$ *individuata nel teorema precedente si dice "*σ*-algebra generata" da* $\mathcal{C}$.

Osservazione. *Sia* $\mathcal{C}$ *una famiglia di sottoinsiemi di* $\mathbb{X}$*, sia* $\mathscr{A}$ *l'algebra generata da* $\mathcal{C}$ *e sia* $\mathscr{B}$ *la* σ*-algebra generata da* $\mathcal{C}$*. Allora si ha che*

$$\mathcal{C} \subseteq \mathscr{A} \subseteq \mathscr{B}$$

Definizione 1.5. *Presa una famiglia* $\mathcal{C}$ *di sottoinsiemi di* $\mathbb{X}$ *si indica:*

$$\mathcal{C}_\sigma = \left\{ A \,:\, A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i, \quad \{A_i\}_{i=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{C} \right\}$$

$$\mathcal{C}_\delta = \left\{ A \,:\, A = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i, \quad \{A_i\}_{i=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{C} \right\}$$

Osservazione. $\mathcal{C}_{\sigma\sigma} = \mathcal{C}_\sigma$ *e* $\mathcal{C}_{\delta\delta} = \mathcal{C}_\delta$*, ovvero* $\mathcal{C}_\sigma$ *è chiuso per unioni numerabili, mentre* $\mathcal{C}_\delta$ *lo è per intersezioni numerabili. Nulla si può dire in generale su* $\mathcal{C}_{\sigma\delta}$ *o* $\mathcal{C}_{\delta\sigma}$.

Definizione 1.6. *Sia* $\mathscr{G}$ *la famiglia degli aperti di* $\mathbb{R}^n$ *(in generale questa non è un'algebra). Si chiama* $\mathscr{B}$*,* σ*-algebra di Borel, la* σ*-algebra generata da* $\mathscr{G}$*; gli insiemi di* $\mathscr{B}$ *si dicono 'boreliani'.*

Definizione 1.7. *Introduciamo anche la famiglia dei chiusi*

$$\mathscr{F} = \left\{ C \subseteq \mathbb{R}^n \,:\, C = \mathscr{C}(A), \;\; A \in \mathscr{G} \right\}$$

Osservazione. $\mathscr{G} \subset \mathscr{G}_\delta \subset \mathscr{G}_{\delta\sigma} \subset \ldots \subset \mathcal{B} \qquad \mathscr{F} \subset \mathscr{F}_\sigma \subset \mathscr{F}_{\sigma\delta} \subset \ldots \subset \mathcal{B}$
Si può dimostrare, però, che con questa procedura non si riesce a ricoprire tutta la σ*-algebra dei boreliani.*

1.2 Spazi con misura

Definizione 1.8. (Spazio di misura)
Si definisce "spazio di misura" una coppia $(\mathbb{X}, \mathscr{A})$*, dove* $\mathbb{X}$ *è un'insieme e* $\mathscr{A}$ *è una* σ*-algebra su* $\mathbb{X}$*.*

Definizione 1.9. (Misura)
Dato uno spazio di misura $(\mathbb{X}, \mathscr{A})$*, si dice "misura" una funzione* $\mu : \mathscr{A} \longrightarrow [0, +\infty]$ *che verifica le seguenti proprietà:*

1. $\mu(\emptyset) = 0$
2. (Additività numerabile)
   $\forall \{E_i\}_{i=1}^{\infty} \subseteq \mathscr{A}$ *con* E_i *insiemi in* $\mathscr{A}$ *a due a due disgiunti, vale che*

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i)$$

Lemma 1.11. (Additività finita)
Siano $E_1, E_2, \ldots, E_n \in \mathscr{A}$ *insiemi a due a due disgiunti, allora se* μ *è una misura su* $\mathscr{A}$ *si ha che* $\mu\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mu(E_i)$*.*

Dimostrazione. L'additività finita discende direttamente dall'additività numerabile. Basta infatti considerare la successione

$$\{E_i\}_{i=1}^{\infty} = \{E_1, E_2, \ldots, E_n, \emptyset, \ldots, \emptyset, \ldots\}$$

□

Proposizione 1.12. (Monotonia)
Sia μ *una misura su* $(\mathbb{X}, \mathscr{A})$*, siano* $A, B \in \mathscr{A}$ *con* $A \subseteq B$*, allora* $\mu(A) \leq \mu(B)$*.*

Dimostrazione. Sia $C = B \setminus A$. Allora $C \in \mathscr{A}$ e $B = A \cup C$. Poiché $A \cap C = \emptyset$ possiamo usare la proprietà dell'additività finita ottenendo

$$\mu(A) \leq \mu(A) + \mu(C) = \mu(B)$$

□

Proposizione 1.13. (Subadditività numerabile)
Sia μ *una misura su* $(\mathbb{X}, \mathscr{A})$ *e* $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ *una successione in* $\mathscr{A}$*, allora*

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$$

Dimostrazione. Definiamo, a partire da $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$, la seguente successione

$$B_1 \stackrel{\text{def}}{=} A_1$$

$$B_2 \stackrel{\text{def}}{=} A_2 \setminus A_1$$

$$\vdots$$
$$B_n \stackrel{\text{def}}{=} A_n \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i \right)$$

come avevamo già fatto per la proposizione 1.7, in cui avevamo anche dimostrato che i B_i sono a due a due disgiunti e che $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} B_i$. Allora

$$\mu \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right) = \mu \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu \left(B_i \right)$$

Inoltre $B_i \subseteq A_i$ e pertanto, utilizzando la monotonia della misura, si ha che $\mu(B_n) \leq \mu(A_n)$. Quindi

$$\mu \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu \left(B_i \right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu \left(A_i \right)$$

$\square$

Proposizione 1.14. *Siano $A, B \in \mathscr{A}$ con $A \subseteq B$ e $\mu(B) < +\infty$. Allora si verifica che $\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$*

Dimostrazione. L'ipotesi secondo la quale $\mu(B) < +\infty$ implica per monotonia $\mu(A) < +\infty$. Si ha dunque che $\mu(B) = \mu(B \setminus A) + \mu(A)$ da cui la tesi $\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$ (si può effettuare la sottrazione perché le quantità in questione sono finite). $\square$

Teorema 1.15. *Sia μ una misura su $(\mathbb{X}, \mathscr{A})$ e sia $\{E_i\}_{i=1}^{\infty} \subseteq \mathscr{A}$ una successione tale che $\forall i \in \mathbb{N}$, $E_{i+1} \subseteq E_i$ con $\mu(E_1) < +\infty$, allora*

$$\mu \left(\bigcap_{i=1}^{\infty} E_i \right) = \lim_{n \to +\infty} \mu \left(E_n \right)$$

Dimostrazione. Essendo $E_1 < \infty$ dall'ipotesi secondo cui $\forall i \in \mathbb{N}$, $E_{i+1} \subseteq E_i$ per monotonia si ha che $\forall i \in \mathbb{N}, \mu(E_i) < \infty$. Definiamo inoltre $E \stackrel{\text{def}}{=} \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} E_i$. Si ha dunque che $E \subseteq E_1$, inoltre, sempre dal fatto che $\forall i \in \mathbb{N}$, $E_{i+1} \subseteq E_i$ discende che $\forall i \in \mathbb{N}$, $(E_i \setminus E_{i+1}) \subseteq E_1$, e quindi ciascuno di questi insiemi ha misura finita. L'unione di tutti questi insiemi continuerà ad essere contenuta in E_1 e pertanto possiamo scrivere che

$$E \cup \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} \left(E_i \setminus E_{i+1} \right) \right) \subseteq E_1$$

Al fine di dimostrare l'uguaglianza tra i due membri dimostriamo che vale anche l'altro verso dell'inclusione. Sia dunque $x \in E_1$. Se $\forall i \in \mathbb{N}, x \in E_i$ allora $x \in E$, altrimenti, se esiste i tale che $x \notin E_i$, allora, per il buon ordinamento di $\mathbb{N}$, esiste $\bar{i}$ minimo naturale tale che $x \notin E_{\bar{i}}$. Dunque $\forall i < \bar{i}$, $x \in E_i$ ed inoltre, essendo $\{E_i\}_{i=1}^{\infty}$ una successione di insiemi decrescente rispetto all'inclusione,

$\forall i \geq \bar{i}$, $x \notin E_i$. Possiamo pertanto affermare che, nella precedente ipotesi in cui $x \notin E$, $x \in (E_{\bar{i}-1} \setminus E_{\bar{i}})$ e, a maggior ragione, $x \in \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} (E_i \setminus E_{i+1})\right)$.
Si è dunque dimostrata la seguente uguaglianza:

$$E_1 = E \cup \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} (E_i \setminus E_{i+1})\right)$$

Dall'essere E ed $\{E_i \setminus E_{i+1}\}_{i=1}^{\infty}$ una famiglia di insiemi a due a due disgiunti di cui ciascuno di misura finita segue che:

$$\begin{aligned}
\mu(E_1) &= \mu(E) + \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i \setminus E_{i+1}) \\
&= \mu(E) + \sum_{i=1}^{\infty} \Big(\mu(E_i) - \mu(E_{i+1})\Big) \\
&= \mu(E) + \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{i=1}^{n} (\mu(E_i) - \mu(E_{i+1}))\right) \\
&= \mu(E) + \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{i=1}^{n} \mu(E_i) - \sum_{i=1}^{n} \mu(E_{i+1})\right) \\
&= \mu(E) + \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{i=1}^{n} \mu(E_i) - \sum_{i=2}^{n+1} \mu(E_i)\right) \\
&= \mu(E) + \lim_{n\to\infty} (\mu(E_1) - \mu(E_{n+1})) \\
&= \mu(E) + \mu(E_1) - \lim_{n\to\infty} \mu(E_{n+1})
\end{aligned}$$

Osservando che $\lim_{n\to\infty} \mu(E_{n+1}) = \lim_{n\to\infty} \mu(E_n)$, possiamo dunque affermare che

$$\mu(E_1) = \mu(E) + \mu(E_1) - \lim_{n\to\infty} \mu(E_n)$$

da cui $\mu(E) = \lim_{n\to\infty} \mu(E_n)$ (si può effettuare la sottrazione di $\mu(E_i)$ ad ambo i membri perché la quantità in questione è finita).
Dalla definizione di E segue quindi la tesi: $\mu\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(E_n)$. $\square$

Osserviamo che nel Teorema 1.15 l'ipotesi $\mu(E_1)$ potrebbe essere sostituita dall'ipotesi che esiste N tale che $\mu(E_N) < +\infty$. È peró necessario che almeno da un certo punto in poi questa condizione di finitezza sia soddisfatta. Lo proviamo con un controesempio.
Si consideri $\mathbb{X} = \mathbb{N}$ e $\mathscr{A} = 2^{\mathbb{N}}$. È evidente che l'insieme delle parti di ogni insieme $\mathbb{X}$ verifica gli assiomi di σ-algebra. Dunque la coppia $\left(\mathbb{N}, 2^{\mathbb{N}}\right)$ è uno spazio di misura. Definiamo la funzione d'insieme $\mu : \mathscr{A} \longrightarrow \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ come

$$\mu(A) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \#(A) & \text{se } A \text{ è finito} \\ +\infty & \text{se } A \text{ è infinito} \end{cases}$$

dove con il simbolo $\#(A)$ si intende la cardinalità dell'insieme A. È facile verificare che μ soddisfa agli assiomi di misura.

Consideriamo ora la successione $\{E_n\}_{i=i}^{\infty}$ con $E_n \stackrel{\text{def}}{=} \{n, n+1, n+2, \ldots\}$. È facile verificare come la successione appena definita soddisfi tutte le ipotesi del precedente teorema ad eccezione della finitezza della misura degli elementi della successione stessa.
Infatti si ha che $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mu(E_n) = +\infty$ e pertanto $\lim_{n\to\infty} \mu(E_n) = +\infty$. L'intersezione, tuttavia, è l'insieme vuoto e pertanto otteniamo che

$$\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \mu(\emptyset) = 0$$

In conclusione:

$$0 = \mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n\right) \neq \lim_{n\to\infty} \mu(E_n) = +\infty$$

Definizione 1.10. *Sia $\{E_i\}_{i=1}^{\infty}$ una successione di insiemi; si definisce:*

$$\limsup_{n\to+\infty} E_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} E_k$$

$$\liminf_{n\to+\infty} E_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} E_k$$

Per quanto riguarda il $\limsup$*, al crescere di n, $\bigcup_{k=n}^{\infty} E_k$ è una successione descrescente di insiemi, e per questo tipo di successioni la nozione naturale di limite è l'intersezione, ed analogamente per il* $\liminf$*.*

Proposizione 1.16. *Vale che:*

$$\limsup_{n\to+\infty} E_n = \Big\{x \in \mathbb{X} : \textit{esistono infiniti } n \in \mathbb{N} \textit{ tali che } x \in E_n\Big\}$$

$$\liminf_{n\to+\infty} E_n = \Big\{x \in \mathbb{X} : \textit{esiste } \bar{n} \in \mathbb{N} \textit{ tale che } x \in E_k \quad \forall k \geq \bar{n}\Big\}$$

Osservazione. $\liminf_{n\to+\infty} E_n \subseteq \limsup_{n\to+\infty} E_n$

Definizione 1.11. *Se $\liminf_{n\to+\infty} E_n = \limsup_{n\to+\infty} E_n = E \subseteq \mathbb{X}$ si dice che*

$$\exists \lim_{n\to+\infty} E_n = E$$

Esercizio 1.1. *Si dimostri la seguente affermazione:*
Sia μ una misura su $(\mathbb{X}, \mathscr{A})$ e sia $\{E_i\}_{i=1}^{\infty} \subseteq \mathscr{A}$ una successione tale che si abbia $\forall i \in \mathbb{N}$, $E_i \subseteq E_{i+1}$ $\forall i \in \mathbb{N}$. Allora $\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(E_n)$.

Esercizio 1.2. *Sia μ una misura su $(\mathbb{X}, \mathscr{A})$ e sia $\{E_i\}_{i=1}^{\infty} \subseteq \mathscr{A}$ una successione. Si provi che $\mu\left(\liminf_{n\to\infty} E_n\right) \leq \liminf_{n\to\infty} \mu(E_n)$.*

Esercizio 1.3. *Sia μ una misura su $(\mathbb{X}, \mathscr{A})$ e sia $\{E_i\}_{i=1}^{\infty} \subseteq \mathscr{A}$ una successione. Si provi che se $\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_n\right) < \infty$ allora $\mu\left(\limsup_{n\to\infty} E_n\right) \geq \limsup_{n\to\infty} \mu(E_n)$.*

Esercizio 1.4. *Sia μ una misura su $(\mathbb{X}, \mathscr{A})$ e sia $\{E_i\}_{i=1}^{\infty} \subseteq \mathscr{A}$ una successione. Si provi che se $\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_n\right) < \infty$ e se esiste $\lim_{n\to\infty} E_n$, allora esiste $\lim_{n\to\infty} \mu(E_n)$ vale $\mu\left(\lim_{n\to\infty} E_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(E_n)$.*

Definizione 1.12. *Una misura μ su uno spazio di misura $(\mathbb{X}, \mathscr{A})$ si dice "finita" se $\mu(\mathbb{X}) < \infty$.*

Definizione 1.13. *Una misura μ su uno spazio di misura $(\mathbb{X}, \mathscr{A})$ si dice "σ-finita" se esiste una successione $\{X_i\}_{i=1}^{\infty} \subseteq \mathscr{A}$ tale che $\forall i \in \mathbb{N}$, $\mu(X_i) < \infty$ e che ricopra $\mathbb{X}$, ovvero $\bigcup_{i=1}^{\infty} X_i = \mathbb{X}$.*

Definizione 1.14. (Spazio con misura)
Uno spazio con misura è una terna $(\mathbb{X}, \mathscr{A}, \mu)$ dove $\mathbb{X}$ è un insieme, $\mathscr{A}$ è una σ-algebra su $\mathbb{X}$ e μ è una misura su $\mathscr{A}$.

Definizione 1.15. *Sia $(\mathbb{X}, \mathscr{A}, \mu)$ uno spazio con misura, un sottoinsieme $E \subseteq \mathbb{X}$ si dice "misurabile" se e solo se $E \in \mathscr{A}$.*

Definizione 1.16. *Uno spazio con misura $(\mathbb{X}, \mathscr{A}, \mu)$ si dice "completo" se $\forall D \subset \mathbb{X}$ tale che esiste $E \in \mathscr{A}$ tale che $D \subset E$ e $\mu(E) = 0$ si ha che $D \in \mathscr{A}$. Ovvero se ogni sottoisieme di ogni insieme misurabile di misura nulla è anch'esso misurabile.*

Teorema 1.17. *Sia $(\mathbb{X}, \mathscr{A}, \mu)$ uno spazio con misura, allora esiste uno ed uno solo spazio di misura completo $(\mathbb{X}, \mathscr{B}, \nu)$ tale che soddisfi le seguenti proprietà:*

1) $\mathscr{A} \subseteq \mathscr{B}$ (ovvero $\mathscr{B}$ estende $\mathscr{A}$)

2) $\forall E \in \mathscr{A}$, $\nu(E) = \mu(E)$ (ovvero ν estende μ)

3) $E \in \mathscr{B} \Leftrightarrow E = A \cup C$, con $A \in \mathscr{A}$ e C tale che esiste $B \in \mathscr{A}$ in modo che $\mu(B) = 0$ e $C \subseteq B$
(ovvero la terna trovata è l'estensione minimale di quella iniziale per garantire la completezza)

Dimostrazione. Si dimostra che la famiglia $\mathscr{B}$ definita dalla terza proprietà del teorema è una σ-algebra:

$$\mathscr{B} = \left\{ A \cup C \,:\, A \in \mathscr{A}, \exists B \in \mathscr{A} \,:\, C \subseteq B \text{ e } \mu(B) = 0 \right\}$$

1. Possiamo interpretare $\emptyset$ come $\emptyset \cup \emptyset$, dato che $\emptyset \in \mathscr{A}$ e sempre $\emptyset$ è un sottoinsieme di $\emptyset$, insieme di misura nulla. Pertanto, scegliendo $A = B = C = \emptyset$ nella nostra definizione troviamo che $\emptyset \in \mathscr{B}$.

2. Siano $E_1, E_2 \in \mathscr{B}$, con $E_i = A_i \cup C_i$ e $C_i \subseteq B_i$ dove $B_i \in \mathscr{A}$ sono tali che $\mu(B_i) = 0$ per ogni $i \in \{1, 2\}$. Allora $E_1 \cup E_2 = (A_1 \cup A_2) \cup (C_1 \cup C_2)$. Sia $A \stackrel{\text{def}}{=} A_1 \cup A_2$, ed essendo A unione di due insiemi di $\mathscr{A}$, si ha che $A \in \mathscr{A}$. Analogamente definiamo $C \stackrel{\text{def}}{=} C_1 \cup C_2$ che pertanto è contenuto in $B \stackrel{\text{def}}{=} B_1 \cup B_2$ il quale a sua volta appartiene a $\mathscr{A}$ e, essendo B unione di insiemi di misura nulla $\mu(B) = 0$. Quindi $E_1 \cup E_2 \in \mathscr{B}$.

3. Dimostriamo ora che il complementare di un insieme $E \in \mathscr{B}$ appartiene a $\mathscr{B}$. Sia dunque $E = A \cup C$ con $A \in \mathscr{A}$ e $C \subseteq B$ con $B \in \mathscr{A}$ tale che $\mu(B) = 0$. Per le leggi di De Morgan abbiamo che $\complement(E) = \complement(A) \cap \complement(C)$. Definiamo $D \stackrel{\text{def}}{=} B \setminus C$ e osserviamo che $\complement(C) = \complement(B) \cup D$, da cui concludiamo che $\complement(E) = \complement(A) \cap (B \cup D)$. Applicando la distributività

$$\complement(E) = \Big(\complement(A) \cap \complement(B)\Big) \cup \Big(\complement(A) \cap D\Big)$$

In particolare, $\Big(\complement(A) \cap \complement(B)\Big) \in \mathscr{A}$ e, essendo $D \subseteq B$, allora si ha che $\Big(\complement(A) \cap D\Big) \subseteq B$. Pertanto $\complement(E) \in \mathscr{B}$.

4. Osserviamo come prima cosa che l'unione numerabile di insiemi di misura nulla è ancora un insieme di misura nulla.
Consideriamo ora una successione $\{E_i\}_{i=1}^{\infty} \subseteq \mathscr{B}$. Allora, per definizione, $\forall i \in \mathbb{N}$, $E_i = A_i \cup C_i$ con $A_i \in \mathscr{A}$ e $C_i \subseteq B_i$ essendo $B_i \in \mathscr{A}$ tale che $\mu(B_i) = 0$. Definiamo allora $A \stackrel{\text{def}}{=} \displaystyle\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$, e quindi $A \in \mathscr{A}$ poiché questa è una σ-algebra. Analogamente sia $B \stackrel{\text{def}}{=} \displaystyle\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$, utilizzando le argomentazioni precedenti si ha che $B \in \mathscr{A}$ ed inoltre $\mu(B) \leq \displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} \mu(B_i) = 0$. Ancora definiamo $C \stackrel{\text{def}}{=} \displaystyle\bigcup_{i=1}^{\infty} C_i$, dunque avremo che $C \subseteq B \in \mathscr{A}$ con $\mu(B) = 0$. In conclusione $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i = A \cup C$ e quindi appartiene a $\mathscr{B}$.

Abbiamo dunque dimostrato che $\mathscr{B}$ ha la struttura di una σ-algebra.

Dobbiamo ora definire la funzione $\nu : \mathscr{B} \longrightarrow [0, +\infty]$. Sia allora $E \in \mathscr{B}$, per definizione $E = A \cup C$, con $A \in \mathscr{A}$ e C tale che $\exists\, B \in \mathscr{A}$ in modo che $\mu(B) = 0$ e $C \subseteq B$. Poniamo dunque $\nu(E) \stackrel{\text{def}}{=} \mu(A)$. Questa definizione è indipendente dalla rappresentazione di E. Siano dati A_1, A_2, C_1 e C_2 tali che $E = A_1 \cup C_1 = A_2 \cup C_2$, $C_i \subset B_i \in \mathscr{A}$ con $\mu(B_i) = 0$, $i = 1, 2$.
Essendo $A_1 \subseteq E = A_2 \cup C_2 \subseteq A_2 \cup B_2$ si ha che:

$$\mu(A_1) \leq \mu(A_2 \cup B_2) \leq \mu(A_2) + \mu(B_2) = \mu(A_2)$$

da cui $\mu(A_1) \leq \mu(A_2)$ e, invertendo il ruolo degli indici 1 e 2, anche $\mu(A_2) \leq \mu(A_1)$ da cui si ha $\mu(A_1) = \mu(A_2)$. È necessario, inoltre, dimostrare che la funzione ν precedentemente definita sia una misura. Verifichiamo dunque che rispetta i due assiomi di una funzione di misura:

1. $\nu(\emptyset) = \mu(\emptyset) = 0$

2. Per provare l'additività numerabile si consideri $\{E_i\}_{i=1}^{\infty} \subseteq \mathscr{B}$ una successione di insiemi a due a due disgiunti. Per definizione di $\mathscr{B}$ si ha che $\forall i \in \mathbb{N},\ E_i = A_i \cup C_i$, che sono a loro volta a due a due disgiunti. Inoltre $\forall i \in \mathbb{N},\ C_i \subseteq B_i$ con $\mu(B_i) = 0$. Allora

$$\begin{aligned}
\nu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) &= \nu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \cup \bigcup_{i=1}^{\infty} C_i\right) = \\
&= \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) = \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \nu(E_i)
\end{aligned}$$

e dunque si ha la additività numerabile.

È ora necessario dimostrare la completezza di $(\mathbb{X}, \mathscr{B}, \nu)$. Sia $D \subseteq E \in \mathscr{B}$ con $\nu(E) = 0$ essendo $E = A \cup C$ con $C \subseteq B$ e $A, B \in \mathscr{A}$. Allora $\mu(A) = 0$ e inoltre $D \subseteq (A \cup C) \subseteq (A \cup B) \in \mathscr{A}$. Si ha dunque che D è un sottoinsieme di $(A \cup B)$, insieme di misura nulla appartenente a $\mathscr{A}$. Potendo dunque scrivere $D = \emptyset \cup D$ otteniamo che D rientra nella definizione degli insiemi appartenenti a $\mathscr{B}$, e da questo consegue la completezza di $\mathscr{B}$.

Concludiamo la dimostrazione provando infine l'unicità dello spazio di misura $(\mathbb{X}, \mathscr{B}, \nu)$. Supponiamo per assurdo esistere $(\mathbb{X}, \mathscr{B}', \nu')$ un altro spazio con misura che soddisfi ai tre assiomi del teorema. In particolare, il terzo assioma definisce la σ-algebra su cui è costruita la misura e pertanto $\mathscr{B} = \mathscr{B}'$. Si ha inoltre che, $\forall E \in \mathscr{B}$, $E = A \cup C$ e $C \subseteq B$ soddisfacenti alla terza proprietà del teorema, valgono le seguenti disuguaglianze:

$$\nu'(E) \leq \nu'(A \cup B) \leq \nu'(A) + \nu'(B) = \mu(A) + 0 = \mu(A) = \nu(E)$$

$$\nu'(E) \geq \nu'(A) = \mu(A) = \nu(E)$$

e dunque $\forall E \in \mathscr{B}$, $\nu'(E) = \nu(E)$. Pertanto, provata l'unicità, la dimostrazione è terminata. $\square$

1.3 Misura esterna

Definizione 1.17. *Si dice "misura esterna" sull'insieme $\mathbb{X}$ una funzione d'insieme $\mu^* : 2^{\mathbb{X}} \longrightarrow [0, \infty]$ che soddisfi le seguenti proprietà:*

1. $\mu^*(\emptyset) = 0$

2. *μ^* è monotona, ovvero $\forall A, B \subseteq \mathbb{X}$ con $A \subseteq B$ vale che $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$*

3. *μ^* è numerabilmente subadditiva, ovvero*

$$\forall \{E_i\}_{i=1}^{\infty} \subseteq 2^{\mathbb{X}}, \qquad \mu^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(E_i)$$

Proposizione 1.18. *Una misura esterna μ^* è finitamente subadditiva.*

Ora, data una misura esterna, si cerca di selezionare quei sottoinsiemi sui quali essa si comporta da misura.

Definizione 1.18. (Condizione di Carathéodory)
Sia μ^* una misura esterna su $\mathbb{X}$, allora un sottoinsieme $E \subseteq \mathbb{X}$ si dice μ^*-misurabile se e solo se

$$\forall A \subseteq X, \;\; \mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \setminus E)$$

Questa condizione è detta condizione di Carathéodory*.*

Osservazione. *Sia μ^* una misura esterna su $\mathbb{X}$.*
Dato $E \subseteq \mathbb{X}$, per la subadditività di μ^* si ha sempre che

$$\forall A \subseteq X, \quad \mu^*(A) \leq \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \setminus E)$$

dunque la condizione di Caratheodory è equivalente a

$$\forall A \subseteq X, \quad \mu^*(A) \geq \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \setminus E)$$

Essendo inoltre questa sempre verificata se $\mu^*(A) = +\infty$ si ha che $E \subseteq \mathbb{X}$ è μ^*-misurabile se e solo se

$$\forall A \subseteq X \text{ con } \mu^*(A) < +\infty, \quad \mu^*(A) \geq \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \setminus E)$$

Teorema 1.19. *Sia μ^* una misura esterna su $\mathbb{X}$, sia $\mathscr{B}$ la classe degli insiemi μ^*-misurabili, allora $\mathscr{B}$ è una σ-algebra e $\mu^*|_{\mathscr{B}}$ è una misura completa.*

Dimostrazione. Dimostriamo che $\mathscr{B}$ rispetta tutti gli assiomi di una σ-algebra:

1. $\forall A \subseteq \mathbb{X}$, $A \cap \emptyset = \emptyset$ e $A \setminus \emptyset = A$. Si ha dunque che

   $$\mu^*(A \cap \emptyset) + \mu^*(A \setminus \emptyset) = \mu^*(\emptyset) + \mu^*(A) = \mu^*(A)$$

   Allora l'identità di Caratheodory è verificata per l'insieme vuoto, e pertanto $\emptyset \in \mathscr{B}$.

2. Siano $E_1, E_2 \in \mathscr{B}$. Premettiamo che $\forall A \subseteq \mathbb{X}$ valgono le seguenti uguaglianze insiemistiche:

   $$(A \setminus E_2) \cap E_1 = A \cap \complement(E_2) \cap E_1$$
   $$(A \setminus E_2) \setminus E_1 = A \setminus (E_1 \cup E_2)$$
   $$A \cap (E_1 \cup E_2) = (A \cap E_2) \cup \Big(A \cap E_1 \cap \complement(E_2)\Big)$$
   $$A \cap (E_1 \cup E_2) = (A \cap E_2) \cup \Big((A \setminus E_2) \cap E_1\Big)$$

   Consideriamo ora la condizione di Caratheodory per E_2

   $$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap E_2) + \mu^*(A \setminus E_2)$$

   Usiamo ora la condizione di Caratheodory per E_1, prendendo come insieme di riferimento $A \setminus E_2$

   $$\mu^*(A \setminus E_2) = \mu^*\Big((A \setminus E_2) \cap E_1\Big) + \mu^*\Big((A \setminus E_2) \setminus E_1\Big)$$

Per la subadditività di μ^* si ha

$$\mu^*\Big(A \cap (E_1 \cup E_2)\Big) \leq \mu^*(A \cap E_2) + \mu^*\Big((A \setminus E_2) \cap E_1\Big)$$

Dunque ora possiamo scrivere che

$$\begin{aligned}
\mu^*(A) &= \mu^*(A \cap E_2) + \mu^*(A \setminus E_2) \\
&= \mu^*(A \cap E_2) + \mu^*\Big((A \setminus E_2) \cap E_1\Big) + \mu^*\Big((A \setminus E_2) \setminus E_1\Big) \\
&= \mu^*(A \cap E_2) + \mu^*\Big((A \setminus E_2) \cap E_1\Big) + \mu^*\Big(A \setminus (E_1 \cup E_2)\Big) \\
&\geq \mu^*\Big(A \cap (E_1 \cup E_2)\Big) + \mu^*\Big(A \setminus (E_1 \cup E_2)\Big)
\end{aligned}$$

Segue che $E_1 \cup E_2 \in \mathscr{B}$.

3. Sia $E \in \mathscr{B}$. Allora $\forall A \subseteq \mathbb{X}$

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \setminus E) = \mu^*\Big(A \setminus \complement(E)\Big) + \mu^*\Big(A \cup \complement(E)\Big)$$

e dunque anche $\mathscr{C}(E)$ soddisfa la condizione di Caratheodory.

4. Sia $\{E_i\}_{i=1}^{\infty}$ una successione in $\mathscr{B}$, allora si vuole dimostrare che $E = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$ appartiene a $\mathscr{B}$.
Applicando la proposizione 1.7 possiamo affermare che esiste $\{F_i\}_{i=1}^{\infty} \subseteq \mathscr{B}$, successione di insiemi a due a due disgiunti tali che $\forall i \in \mathbb{N}$, $F_i \subseteq E_i$ essendo inoltre $\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$. Definiamo inoltre $G_n \overset{\text{def}}{=} \bigcup_{i=1}^{n} F_i$, notando che $\forall n \in \mathbb{N}$, $G_n \in \mathscr{B}$. Applicando Caratheodory si ottiene che $\forall A \subseteq \mathbb{X}$

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap G_n) + \mu^*(A \setminus G_n)$$

e per la monotonia di μ^*, essendo $G_n \subseteq E$ per ogni n,

$$\mu^*(A) \geq \mu^*(A \cap G_n) + \mu^*(A \setminus E)$$

Per ogni n, essendo $F_n \in \mathscr{B}$, vale che

$$\begin{aligned}
\mu^*(A \cap G_n) &= \mu^*(A \cap G_n \cap F_n) + \mu^*(A \cap G_n \setminus F_n) \\
&= \mu^*(A \cap F_n) + \mu^*(A \cap G_{n-1})
\end{aligned}$$

Per l'arbitrarietà di n

$$\mu^*(A \cap G_{n-1}) = \mu^*(A \cap F_{n-1}) + \mu^*(A \cap G_{n-2})$$

e la precedente diventa

$$\mu^*(A \cap G_n) = \mu^*(A \cap F_n) + \mu^*(A \cap F_{n-1}) + \mu^*(A \cap G_{n-2})$$

Procedendo per induzione, essendo $G_1 = F_1$, si arriva a

$$\mu^*(A \cap G_n) = \sum_{i=1}^{n} \mu^*(A \cap F_i)$$

Utilizziamo questo risultato per semplificare la disequazione trovata precedentemente

$$\begin{aligned}\mu^*(A) &\geq \mu^*(A\cap G_n)+\mu^*(A\setminus E)\\ &= \sum_{i=1}^{n}\mu^*(A\cap F_i)+\mu^*(A\setminus E),\ \forall\, n\end{aligned}$$

e quindi per $n\to\infty$

$$\mu^*(A)\geq\sum_{i=1}^{\infty}\mu^*(A\cap F_i)+\mu^*(A\setminus E)$$

Ricorriamo inoltre alla subadditività numerabile di μ^* per la seguente disequazione

$$\mu^*(A\cap E)=\mu^*\left(A\cap\bigcup_{i=1}^{\infty}F_i\right)=\mu^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}(A\cap F_i)\right)\leq\sum_{i=1}^{\infty}(A\cap F_i)$$

Da cui in conclusione troviamo che

$$\mu^*(A)\geq\mu^*(A\cap E)+\mu^*(A\setminus E)$$

e di conseguenza $E\in\mathscr{B}$.

Quindi possiamo affermare che $\mathscr{B}$ è una σ-algebra. Dobbiamo ora dimostrare che $\mu\overset{\text{def}}{=}\mu^*|_{\mathscr{B}}$ è una misura. A tal fine proviamo preventivamente che μ è finitamente additiva. Siano $E_1,E_2\in\mathscr{B}$ disgiunti e sia $A=E_1\cup E_2$. Si ha dunque che

$$\begin{aligned}\mu(A) &= \mu^*(A)\\ &= \mu^*(A\cap E_1)+\mu^*(A\setminus E_1)\\ &= \mu^*(E_1)+\mu^*(E_2)\\ &= \mu(E_1)+\mu(E_2)\end{aligned}$$

e dunque si ha che $\mu(E_1\cup E_2)=\mu(E_1)+\mu(E_2)$, e pertanto la finita subadditività è dimostrata.
Consideriamo ora invece $\{E_i\}_{i=1}^{\infty}\subseteq\mathscr{B}$, con E_i a due a due disgiunti. Definiamo $E\overset{\text{def}}{=}\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}E_i$. Essendo $\forall n\in\mathbb{N}$, $\bigcup\limits_{i=1}^{n}E_i\subseteq E$, per la monotonia e l'additività precedentemente dimostrata si ha che $\forall n\in\mathbb{N}$

$$\mu(E)\geq\mu\left(\bigcup_{i=1}^{n}E_i\right)=\sum_{i=1}^{n}\mu(E_i)$$

e passando al limite

$$\sum_{i=1}^{n}\mu(E_i)\leq\mu(E)\leq\sum_{i=1}^{n}\mu(E_i)$$

Avendo dunque dimostrato l'additività numerabile si ha che μ è una misura, in quanto $\mu(\emptyset)=0$ è banalmente vero. Concludiamo la dimostrazione con la completezza di $(\mathbb{X},\mathscr{A},\mu)$. Sia allora $E\in\mathscr{B}$ tale che $\mu^*(E)=0$, dunque

$\forall A \subseteq E$ si ha che dall'essere $(A \cap E) \subseteq E$ per la monotonia $\mu^* (A \cap E) = 0$ ed inoltre da $A \setminus E \subseteq A$ si ottiene $\mu^* (A \setminus E) \leq \mu^* (A)$. Si è dunque dimostrata la condizione di Caratheodory per tutti gli insiemi aventi misura esterna nulla, infatti $\mu^* (A) \geq \mu^* (A \setminus E) = \mu^* (A \setminus E) + 0 = \mu^* (A \setminus E) + \mu^* (A \cap E)$ e pertanto ogni insieme avente misura esterna nulla appartiene a $\mathscr{B}$.

Consideriamo ora $F \subseteq E$ con $E \in \mathscr{B}$ tale che $\mu (E) = 0$. Dimostreremo che $F \in \mathscr{B}$ al fine di provare la completezza. Allora si ha $\mu^* (F) \leq \mu^* (E) = \mu (E) = 0$, ovvero $\mu^* (B) = 0$. Abbiamo appena dimostrato, tuttavia, che ogni insieme avente misura esterna nulla è misurabile, e quindi $F \in \mathscr{B}$ e $\mu (F) = 0$. Ogni affermazione del teorema è stata dunque dimostrata. $\square$

Capitolo 2

Misura di Lebesgue su $\mathbb{R}^n$

In questo capitolo si affronta il problema di definire una misura su $\mathbb{R}^n$.

2.1 Misura di Lebesgue

Definizione 2.1. *Siano $a, b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ con $a \leq b$, allora indichiamo con $\mathrm{I}(a, b)$ un intervallo nella retta estesa di estremi a e b senza distinguere se contiene o no gli estremi, ovvero intendiamo che $(I)(a, b)$ è uno qualunque degli intervalli*

$$\begin{cases} (a, b) \\ [a, b) \\ (a, b] \\ [a, b] \end{cases}$$

Definizione 2.2. *Sia $I \subseteq \mathbb{R}^n$, si dirà che I è un intervallo se e solo se*

$$I = \prod_{i=1}^{n} \mathrm{I}(a_i, b_i)$$

dove ogni $\mathrm{I}(a_i, b_i)$ è un intervallo sulla retta estesa.

Definizione 2.3. *Definiamo $\ell(I)$ la funzione lunghezza di un intervallo $\ell(I) \stackrel{\text{def}}{=} \prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i)$, se $b_i > a_i \quad \forall i$, mentre $\ell(I) = 0$ se esiste $i \in \{1, \ldots, n\}$ tale che $a_i = b_i$.*

Definizione 2.4. *Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$ diremo che una successione $\{I_k\}_{k=1}^{\infty}$ di intervalli ricopre A se $A \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k$.*

Definizione 2.5. *Definiamo la funzione $\mu^* : 2^{\mathbb{R}^n} \longrightarrow [0, +\infty]$ nel seguente modo. Per ogni $A \subseteq \mathbb{R}^n$ poniamo*

$$\mu^*(A) \stackrel{\text{def}}{=} \inf \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \ell(I_k) \, : \, \{I_k\}_{k=1}^{\infty} \ \textit{ricopre } A \right\}$$

Teorema 2.1. *La funzione μ^* appena definita è una misura esterna su $\mathbb{R}^n$.*

Dimostrazione. Notiamo che μ^* è definita su ogni sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$ ed è a valori in $[0, +\infty]$. Mostriamo che rispetta i tre assiomi di una misura esterna:

1. Fissati comunque $a_i \in \mathbb{R}$, abbiamo $\emptyset = I$, dove $I = \prod_{i=1}^n (a_i, a_i)$. Quindi la successione $\{I, I, I, \ldots\}$ ricopre $\emptyset$ e si ha che $\sum_{i=1}^{\infty} \ell(I) = \sum_{i=1}^{\infty} 0 = 0$, pertanto $\mu^*(\emptyset) = 0$.

2. Per provare la monotonia, consideriamo $A \subseteq B \subseteq \mathbb{R}^n$. Poiché ogni successione che ricopre B ricopre anche A, ovvero:
$$\begin{aligned}&\left\{\{I_k\}_{k=1}^{\infty} : \{I_k\}_{k=1}^{\infty} \text{ ricopre } B\right\} \subseteq \\ &\subseteq \left\{\{I_k\}_{k=1}^{\infty} : \{I_k\}_{k=1}^{\infty} \text{ ricopre } A\right\}\end{aligned}$$
si ha quindi che $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$ per le proprietà dell'estremo inferiore.

3. Sia $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$ una successione di sottoinsiemi di $\mathbb{R}^n$. Si vuole dimostrare che $\mu^*\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(A_k)$. Se esiste $k \in \mathbb{N} : \mu^*(A_k) = +\infty$ allora la diseguaglianza è ovvia. Supponiamo allora $\forall k \in \mathbb{N}$, $\mu^*(A_k) < +\infty$. Per la definizione di μ^* e di estremo inferiore si ha che:
$$\forall \eta > 0,\ \exists \left\{I_j^k\right\}_{j=1}^{\infty} \text{ che ricopre } A_k\ :\ \sum_{j=1}^{\infty} \ell\left(I_j^k\right) \leq \mu^*(A_k) + \eta$$
Fissato $\varepsilon > 0$, poniamo $\eta = 2^{-k}\varepsilon$ e consideriamo la famiglia numerabile di intervalli $\left\{I_j^k\right\}_{j,k=1}^{+\infty}$.

   Abbiamo che $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} I_j^k\right)$ da cui $A \subseteq \bigcup_{j,k=1}^{\infty} I_j^k$, ovvero $\left\{I_j^k\right\}_{j,k=1}^{+\infty}$ ricopre A. Quindi abbiamo
$$\mu^*(A) \leq \sum_{j,k=1}^{\infty} \ell\left(I_j^k\right)$$
Notiamo che questa somma a due indici j, k è ben definita perchè tutti gli addendi sono nonnegativi e quindi la somma è indipendente dall'ordine dei termini. Di conseguenza
$$\begin{aligned}\mu^*(A) &\leq \sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{j=1}^{\infty} \ell\left(I_j^k\right)\right) \leq \\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty}\left(\mu^*(A_k) + \varepsilon \cdot 2^{-k}\right) = \\ &= \left(\sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(A_k)\right) + \varepsilon\end{aligned}$$

Per l'arbitrarietà di ε si ha che $\mu^*(A) \le \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(A_k)$ e pertanto l'additività numerabile è dimostrata.

□

Definizione 2.6. *I sottoinsiemi di $\mathbb{R}^n$ che sono μ^*-misurabili si definiscono "insiemi di Lebesgue"; la σ-algebra formata dagli insiemi di Lebesgue si indica con $\mathscr{L}^n$; $\mu = \mu^*_{|\mathscr{L}^n}$ è detta misura di Lebesgue Quando non c' è ambiguità sulla dimensione n, la σ-algebra di Lebesgue si indicherà anche $\mathscr{L}$.*

Osservazione. *Per quanto affermato dal teorema 1.19 sulla σ-algebra formata dagli insiemi μ^*-misurabili, la misura di Lebesgue su $\mathbb{R}^n$ è una misura completa.*

Lemma 2.2. *Sia $j \in \{1, \dots, n\}$, sia $a \in \mathbb{R}$ e sia $S_a^j = \{x \in \mathbb{R}^n : x_j > a\}$ un semispazio di $\mathbb{R}^n$. Allora S_a^j è misurabile secondo Lebesgue.*

Dimostrazione. È necessario verificare che tali semispazi verificano la condizione di Caratheodory. Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$, definiamo $A^+ \overset{\text{def}}{=} A \cap S_a^j$ e $A^- \overset{\text{def}}{=} A \setminus S_a^j$. In particolare, per ogni intervallo $I \subseteq \mathbb{R}^n$, si ha che anche I^+ e I^- sono due intervalli internamente disgiunti che uniti restituiscono I, e dunque una verifica elementare ci mostra che

$$\ell(I) = \ell\left(I^+\right) + \ell\left(I^-\right)$$

Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$ tale che $\mu(A) < +\infty$. Si deve provare che:

$$\mu^*(A) = \mu^*\left(A^+\right) + \mu^*\left(A^-\right)$$

Si ha che $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \{I_k\}_{k=1}^{\infty}$ successione di intervalli che ricopre A tale che $\sum_{k=1}^{\infty} \ell(I_k) \le \mu^*(A) + \varepsilon$. Inoltre, la successione $\left\{I_k^+\right\}_{k=1}^{\infty}$ ricopre A^+ e la successione $\left\{I_k^-\right\}_{k=1}^{\infty}$ ricopre A^-. Allora vale che

$$\begin{aligned} \mu^*\left(A^+\right) + \mu^*\left(A^-\right) &\le \sum_{k=1}^{\infty} \ell\left(I_k^+\right) + \sum_{k=1}^{\infty} \ell\left(I_k^-\right) = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \Big(\ell\left(I_k^+\right) + \ell\left(I_k^-\right)\Big) = \sum_{k=1}^{\infty} \ell(I_k) \end{aligned}$$

e ricordando che $\sum_{k=1}^{\infty} \ell(I_k) \le \mu^*(A) + \varepsilon$, per l'arbitrarietà di ε,

$$\mu^*\left(A^+\right) + \mu^*\left(A^-\right) \le \mu^*(A)$$

e pertanto la tesi è dimostrata. □

Lemma 2.3. *Per ogni $A \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto esiste una famiglia numerabile $\{Q_k\}_{k=1}^{\infty}$ di cubi chiusi internamente disgiunti tali che $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} Q_k$.*

Dimostrazione. Sia A un insieme aperto di $\mathbb{R}^n$. Siano $\{Q_j^1\}$ i cubi chiusi con vertici a coordinate intere e di lato 1 tali che $Q_j^1 \subseteq A$ (questa famiglia è al più numerabile). Siano $\{Q_j^2\}$ i cubi chiusi con vertici multipli interi di 2^{-1} e lato 2^{-1} contenuti in $A \setminus \left(\bigcup_j Q_j^1\right)$. Analogamente $\forall k \in \mathbb{N}$ si considerano $\{Q_j^{k+1}\}$, i cubi chiusi con vertici a coordinate multipli interi di 2^{-k} e di lato 2^{-k} contenuti in $A \setminus \left(\bigcup_{h=1}^{k} \bigcup_j Q_j^h\right)$. Allora si ha che:

$$A = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_j Q_j^k$$

Infatti, se $x \in A$ e $x \notin \bigcup_{k=1}^{\bar{k}+1} \bigcup_j Q_j^k$ allora esiste un cubo Q di lato $2^{-\bar{k}}$ tale che $x \in Q$ e $Q \nsubseteq A$, ovvero esiste $y \in Q \setminus A$ e si ha che $\|x - y\| \leq \sqrt{n} \cdot 2^{-\bar{k}}$ (diametro del cubo).
Se esistesse $x \in A$ tale che $x \notin \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_j Q_j^k$, allora si avrebbe

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \exists y_k \in \complement(A) \quad \text{tale che} \quad \|x - y\| \leq \sqrt{n} \cdot 2^{-k}$$

Dunque $d\Big(x, \complement(A)\Big) = 0$. Poiché $\complement(A)$ è chiuso, $x \in \complement(A)$, il che è assurdo. $\square$

Teorema 2.4. *Sia $\mathcal{F} = \left\{S_a^j \, : \, j \in \{1, 2, \ldots, n\},\, a \in \mathbb{R}\right\}$ la famiglia dei sottospazi di $\mathbb{R}^n$. La σ-algebra generata da $\mathcal{F}$ è $\mathscr{B}$, σ-algebra di Borel.*

Dimostrazione. Sia $\mathscr{A}$ la σ-algebra generata da $\mathcal{F}$. Si ha che $\mathscr{A} \subseteq \mathscr{B}$ poiché $\mathcal{F}$ è una sottoclasse di $\mathscr{G}$, essendo formata da insiemi aperti. Dimostriamo ora che $\mathscr{B} \subseteq \mathscr{A}$.
Osserviamo intanto che anche i seguenti semispazi appartengono ad $\mathscr{A}$ per ogni $a \in \mathbb{R}$ e per ogni $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$:

$$\overline{S_a^j} = \{x \in \mathbb{R}^n \, : \, x_j \geq a\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} S_{a+\frac{1}{k}}^j \in \mathscr{A}$$
$$\overline{U_a^j} = \{x \in \mathbb{R}^n \, : \, x_j \leq a\} = \complement\left(S_a^j\right) \in \mathscr{A}$$
$$U_a^j = \{x \in \mathbb{R}^n \, : \, x_j < a\} = \complement\left(\overline{S_a^j}\right) \in \mathscr{A}$$

Poiché ogni intervallo è scrivibile come intersezione finita di semispazi del tipo S_a^j, $\overline{S_a^j}$, U_a^j, e $\overline{U_a^j}$, si ha che la famiglia degli intervalli è contenuta $\mathscr{A}$.
Dal momento che, per il lemma precedente, ogni aperto è scrivibile come unione numerabile di cubi (che sono intervalli) segue che $\mathscr{G} \subseteq \mathcal{F}$, da cui $\mathscr{B} \subseteq \mathscr{A}$. $\square$

Richiamiamo alcune nozioni già introdotte nel capitolo precedente.

Definizione 2.7. *Sia $\mathscr{G}$ la famiglia degli aperti di $\mathbb{R}^n$. Sia $\mathscr{F}$ la famiglia di chiusi di $\mathbb{R}^n$. Definiamo $\mathscr{G}_\delta$ la famiglia degli insiemi ottenuti per intersezioni numerabili di aperti. Allo stesso modo definiamo $\mathscr{F}_\sigma$ la famiglia di insiemi ottenuti per unioni numerabili di chiusi. Analogamente $\mathscr{G}_{\delta\sigma}$ individua la famiglia di unioni numerabili di intersezioni numerabili di aperti, e via proseguendo.*

Proposizione 2.5. *Valgono le seguenti catene di inclusioni strette*

$$\mathscr{G} \subset \mathscr{G}_\delta \subset \mathscr{G}_{\delta\sigma} \subset \mathscr{G}_{\delta\sigma\delta} \subset \ldots \subset \mathscr{B}$$

$$\mathscr{F} \subset \mathscr{F}_\sigma \subset \mathscr{F}_{\sigma\delta} \subset \mathscr{F}_{\sigma\delta\sigma} \subset \ldots \subset \mathscr{B}$$

Teorema 2.6. *Tutti gli insiemi boreliani sono misurabili secondo Lebesgue. Più brevemente, $\mathscr{B} \subseteq \mathscr{L}^n$.*

Dimostrazione. Questa è una conseguenza immediata del Teorema 2.4. Ne diamo qui una dimostrazione alternativa. È sufficiente dimostrare che $\mathscr{G} \subseteq \mathscr{L}^n$. Sia A un aperto di $\mathbb{R}^n$. Allora, essendo la famiglia degli intervalli aperti una base per la topologia standard di $\mathbb{R}^n$, si ha che esiste un insieme J non necessariamente numerabile tale che $A = \bigcup_{\alpha \in J} I_\alpha$ dove gli I_α sono intervalli aperti. D'altra parte ogni intervallo aperto è rappresentabile come unione di intervalli aperti con vertici a coordinate razionali, quindi ogni aperto è rappresentabile come unione di intervalli aperti con vertici a coordinate razionali(in altri termini: tali intervalli aperti con vertici a coordinate razionali costituiscono una base di intorni per $\mathbb{R}^n$). E dato che tali intervalli costituiscono una famiglia numerabile, ne segue che ogni aperto è una unione numerabile di intervalli, e quindi è un insieme di Lebesgue. □

Lemma 2.7. *Sia I un intervallo* limitato *(e dunque tutti i lati hanno estremi reali), allora $\forall \varepsilon > 0$ esiste J intervallo aperto tale che $I \subseteq J$ e $\ell(J) \leq \ell(I) + \varepsilon$.*

Dimostrazione. Sia $I = \prod_{i=1}^{n} \mathrm{I}(a_i, b_i)$ con $a_i, b_i \in \mathbb{R}$. Preso $h > 0$, si definisce $J \overset{\text{def}}{=} \prod_{i=1}^{n}]a_i - h, b_i + h[$. Allora J è un intervallo aperto, $I \subseteq J$ e si ha che $\ell(J) = \prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i + 2h)$. Dunque la lunghezza di J, come funzione di h, è un polinomio e quindi continuo, pertanto $\lim_{h \to 0^+} \ell(J) = \ell(I)$, e dunque, fissato $\varepsilon > 0$, $\exists h :\ \ell(J) \leq \ell(I) + \varepsilon$. □

Lemma 2.8. *Per ogni $A \subseteq \mathbb{R}^n$, si ha*

$$\mu^*(A) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \ell(I_k) \ : \ \begin{array}{c} \{I_k\} \text{ è una successione di intervalli che ricopre} \\ A \text{ tale che } I_k \text{ è aperto e limitato per ogni } k \end{array} \right\}$$

Dimostrazione. Sia $\nu(A)$ l'estremo inferiore al secondo membro qui sopra. Si ha che sempre $\mu^*(A) \leq \nu(A)$ perché passando da μ^* a ν l'inf viene fatto su un insieme più piccolo, e quindi aumenta. Inoltre, se $\mu^*(A) = +\infty$ allora vale l'uguaglianza e la tesi è dimostrata. Sia $\mu^*(A) < +\infty$. Per la definizione di μ^*, si ha che $\forall \varepsilon > 0$, esiste $\{I_k\}$ una successione di intervalli che ricopre A tale che $\sum_{k=1}^{\infty} \ell(I_k) \leq \mu^*(A) + \varepsilon < +\infty$. Pertanto $\ell(I_k) < +\infty \quad \forall k \in \mathbb{N}$. Se $\ell(I_k) > 0$, allora I_k è limitato. Se $\ell(I_k) = 0$, allora I_k si può scomporre come $I_k = \bigcup_{j=1}^{\infty} I_k^j$ con I_k^j limitati e $\ell\left(I_k^j\right) = 0$ (questa scomposizione si può ottenere intersecando l'intervallo di partenza con la famiglia numerabile di cubi di lato 1 e vertici a coordinate intere). Non è dunque restrittivo supporre che $\forall k \in \mathbb{N}$, I_k sia limitato. In dipendenza di ε, esiste J_k intervallo aperto tale che $I_k \subseteq J_k$, $\ell(J_k) \leq \ell(I_k) + \varepsilon \cdot 2^{-k}$. Essendo quindi $A \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} J_k$,

$$\nu(A) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \ell(J_k) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \left(\ell(I_k) + \varepsilon \cdot 2^{-k}\right) \leq \mu^*(A) + 2\varepsilon$$

e dunque, per l'arbitrarietà di ε, si ha$\nu(A) \leq \mu^*(A)$ e quindi la tesi. □

Proposizione 2.9. *Sia $I \subseteq \mathbb{R}^n$ un intervallo, allora $\mu(I) = \mu^*(I) = \ell(I)$.*

Dimostrazione. Supponiamo per il momento che I sia chiuso e limitato. $\forall \varepsilon > 0$, esiste una successione di intervalli aperti e limitati $\{I_k\}_{k=1}^{\infty}$ tali che $I \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k$ e $\sum_{k=1}^{\infty} \ell(I_k) \leq \mu^*(I) + \varepsilon$. Essendo I compatto, si può estrarre un sottoricoprimento finito da $\{I_k\}_{k=1}^{\infty}$ e dunque esiste n tale che $I \subseteq \bigcup_{k=1}^{n} I_k$. Consideriamo gli iperpiani di $\mathbb{R}^n$ contenenti le facce di I, $I_1, I_2, \ldots, I_n$. Questi iperpiani scompongono $\mathbb{R}^n$ in un numero finito di intervalli E_m, con $m \in M$. Si ha che gli E_m sono a due a due disgiunti. Poniamo

$$M_k = \{m \in M \mid E_m \subset I_k\},\ k = 1, \ldots, n$$

$$M_0 = \{m \in M \mid E_m \subset I\}$$

Otteniamo

$$\forall k = 1, \ldots, n, I_k = \bigcup_{m \in M_k} E_m \quad \text{e} \quad I = \bigcup_{m \in M_0} E_m$$

Essendo $I \subseteq \bigcup_{k=1}^{n} I_k$ si ha anche che $M_0 \subseteq \bigcup_{k=1}^{n} M_k$. Inoltre si vede che dato che la scomposizione $I = \cup_{m \in M_O} E_m$ è ottenuta tagliando I lungo un numero finito di iperpiani si ricava per induzione $\ell(I) = \sum_{m \in M_0} \ell(E_m)$, e analogamente $\ell(I_k) = \sum_{m \in M_k} \ell(E_m)$. Concludendo

$$\ell(I) = \sum_{m \in M_0} \ell(E_m) \leq \sum_{m \in \cup_k M_k} \ell(E_m) \leq \sum_{k=1}^{n} \sum_{m \in M_k} \ell(E_m) \leq \sum_{k} \ell(I_k) \leq \mu^*(I) + \varepsilon$$

e, per l'arbitrarietà di ε, $\ell(I) \leq \mu^*(I)$. Essendo, per definizione, $\mu^*(I) \leq \ell(I)$ si ha $\mu^*(I) = \ell(I)$. Inoltre, siccome $I \in \mathscr{B} \subset L$, automaticamente $\mu(I) = \mu^*(I)$.

Sia ora I un iperpiano; allora $I = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \ldots \times [a_i, a_i] \times \mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R}$. Allora, per come è stata definita la funzione ℓ, si ha che $\ell(I) = 0$ e dunque $\mu^*(I) = 0$. Questo implica che, per ogni intervallo, le sue facce hanno misura esterna nulla. Sia allora I un intervallo aperto e limitato, si avrà che $\mu^*\left(\bar{I} \setminus I\right) = 0$, e pertanto $\mu^*(I) = \mu^*\left(\bar{I}\right) = \ell\left(\bar{I}\right) = \ell(I)$.

Il medesimo ragionamento si applica nel caso in cui I non sia né aperto né chiuso. Essendo, $\mathring{I} \subseteq I \subseteq \bar{I}$ si ha $\ell(I) = \mu^*(\mathring{I}) \leq \mu^*(I) \leq \mu^*\left(\bar{I}\right) = \ell(I)$.

Sia infine I illimitato; se $\ell(I) = 0$ allora $\mu^*(I) \leq \ell(I) = 0$, altrimenti si ha che $\ell(I) = \infty$. Definiamo $Q_m \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R}^n : |x_j| \leq m \quad \forall j \in \{1, 2, \ldots, n\}\}$. Dunque l'intervallo $I_m \stackrel{\text{def}}{=} I \bigcap Q_m$ è un intervallo limitato; inoltre $I_m \subseteq I_{m+1}$ e $\bigcup_{m=1}^{\infty} I_m = I$. Pertanto $\lim_{n\to\infty} \mu^*(I_m) = \lim_{n\to\infty} \ell(I_m) = +\infty$ e si può concludere considerando che $\mu^*(I) = \lim_{n\to\infty} \mu^*(I_m) = +\infty = \ell(I)$. □

Definizione 2.8. *Siano A e B due insiemi, allora diremo "differenza simmetrica" degli insiemi A e B l'insieme $A \triangle B \stackrel{\text{def}}{=} (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.*

Esercizio 2.1. *Presi tre insiemi A, B e C si dimostri che vale la seguente inclusione: $A \triangle B \subseteq (A \triangle C) \cup (C \triangle B)$.*

Esercizio 2.2. *Sia $(\mathbb{X}, \mathscr{A}, \mu)$ uno spazio con misura finita. Siano $A, B \in \mathscr{A}$, poniamo la seguente relazione:*

$$A \sim B \qquad \Leftrightarrow \qquad \mu(A \triangle B) = 0$$

Si dimostri che $\sim$ è una relazione di equivalenza.
Definita la funzione d'insieme $d(A, B) \stackrel{\text{def}}{=} \mu(A \triangle B)$, si dimostri che $\left(\mathscr{A}/\sim, d\right)$ è uno spazio metrico. Si dica se è completo. (NB: questo ultimo quesito avrà una spiegazione più trasparente quando avremo a disposizione il teorema di Riesz-Fisher, Teorema 7.8.)

2.2 Approssimazione di insiemi misurabili

Lemma 2.10. *Sia $E \subseteq \mathbb{R}^n$ qualunque. $\forall \varepsilon > 0$, $\exists O$ aperto tale che $E \subseteq O$ e $\mu^*(0) \leq \mu^*(E) + \varepsilon$.*

Dimostrazione. $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \{I_k\}_{k=1}^{\infty}$ successione di intervalli aperti che ricopre E tale che $\sum_{k=1}^{\infty} \ell(I_k) \leq \mu^*(E) + \varepsilon$. Sia $O \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k$, allora O è aperto e $E \subseteq O$.

$$\mu^*(O) = \mu^*\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} I_k\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(I_k) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \ell(I_k) \leq \mu^*(E) + \varepsilon$$

□

Teorema 2.11. *Sia* $E \subseteq \mathbb{R}^n$*. Allora* $E \in \mathscr{L}^n$ *se e solo se vale una delle seguenti affermazioni*

1. $\forall \varepsilon > 0$, $\exists O$ *aperto tale che* $E \subseteq O$ *e* $\mu^*(O \setminus E) \leq \varepsilon$.
2. $\forall \varepsilon > 0$, $\exists F$ *chiuso tale che* $F \subseteq E$ *e* $\mu^*(E \setminus F) \leq \varepsilon$.
3. $\exists G \in \mathscr{G}_\delta$ *tale che* $E \subseteq G$ *e* $\mu^*(G \setminus E) = 0$.
4. $\exists F \in \mathscr{F}_\sigma$ *tale che* $F \subseteq E$ *e* $\mu^*(E \setminus F) = 0$.

Inoltre, se si ha che $\mu^*(E) < \infty$*, allora* E *è misurabile secondo Lebesgue se e solo se vale*

5. $\forall \varepsilon > 0$, $\exists U$ *unione finita di intervalli tali che* $\mu^*(U \triangle E) \leq \varepsilon$.

Dimostrazione. Occupiamoci inizialmente del caso in cui $\mu^*(E) < \infty$. Dimostreremo che la misurabilità implica la prima affermazione. Dopo di che dimostreremo l'equivalenza tra la prima e la quinta affermazione. Applicando il lemma 2.10 abbiamo immediatamente che $\forall \varepsilon > 0$, $\exists O$ aperto tale che $E \subseteq O$ e $\mu^*(O) \leq \mu^*(E) + \varepsilon$. Essendo E misurabile secondo Lebesgue, vale su E l'identità di Caratheodory, ovvero per ogni insieme A vale

$$\mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \setminus E) = \mu^*(A)$$

Scegliendo $A = O$ come insieme misurabile si ha

$$\mu^*(O \cap E) + \mu^*(O \setminus E) = \mu^*(O)$$

Essendo $E \subseteq O$ si ha che $E \cap O = E$, e dunque si ha

$$\mu^*(E) + \mu^*(O \setminus E) = \mu^*(O) \leq \mu^*(E) + \varepsilon$$

da cui sottranendo $\mu^*(E) < \infty$ ad ambo i membri

$$\mu^*(O \setminus E) \leq \varepsilon$$

Dimostriamo ora che (1) $\Rightarrow$ (5), nell'ipotesi in cui $\mu^*(E) < \infty$. Essendo O aperto, O è unione numerabile di cubi chiusi I_k a due a due internamente disgiunti, quindi $O = \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k$. Sappiamo inoltre che $\mu^*(O) \leq \mu^*(E) + \varepsilon < \infty$ e $\mu^*(O) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(I_k)$. Pertanto la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \mu(I_k)$ è convergente, e pertanto vale che $\lim_{h \to \infty} \sum_{k=h}^{\infty} \mu(I_k) = 0$. Scegliamo, pertanto H tale che $\sum_{k=H}^{\infty} \mu(I_k) \leq \varepsilon$ e definiamo $U \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{k=1}^{H-1} I_k \subseteq O$. Per come è stato definito U si ha che $\mu(O \setminus U) = \sum_{k=H}^{\infty} \mu(I_k) \leq \varepsilon$.

Ricordando l'esercizio 2.1 vale che $E \triangle U \subseteq (E \triangle O) \cup (O \triangle U)$, da cui

$$\mu^*(E \triangle U) \leq \mu^*(E \triangle O) + \mu^*(O \triangle U) = \mu^*(O \setminus E) + \mu^*(E \setminus U) \leq \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$$

Dimostriamo ora (5) $\Rightarrow$ (1). Dunque, per ipotesi

$$\forall\varepsilon > 0,\, \exists U = \bigcup_{i=1}^{k} I_i \text{ tali che } \mu^*\left(E \triangle U\right) \leq \varepsilon$$

Non è restrittivo supporre che gli I_i e quindi U siano aperti. Allora, per il lemma 2.10, $\exists\, G$ aperto tale che $E \subseteq G$ e $\mu^*(G) \leq \mu^*(E) + \varepsilon$. Sia $O \stackrel{\text{def}}{=} U \cup G$, allora O è aperto e $E \subseteq O$.
Notiamo che valgono le seguenti inclusioni insiemistiche:

$$O \setminus E = O \triangle E \subseteq (O \triangle U) \cup (U \triangle E) = (O \setminus U) \cup (E \triangle U)$$

da cui

$$\mu^*(O \setminus E) \leq \mu^*(O \setminus U) + \mu^*(E \triangle U) \leq \mu^*(O \setminus U) + \varepsilon = \mu^*(O) - \mu^*(U) + \varepsilon$$

Inoltre

$$\mu^*(O) \leq \mu^*(G) + \mu^*(U \setminus G) \leq \mu^*(E) + \varepsilon + \mu^*(U \setminus E) \leq \mu^*(E) + 2\varepsilon$$

e, dalle due precedenti, si ha $\mu^*(O \setminus E) \leq \mu^*(E) - \mu^*(U) + 3\varepsilon$. Dall'essere $E = (E \cap U) \cup (E \setminus U)$ si ha per subadditività

$$\mu^*(O \setminus E) \leq \mu^*(E \cap U) + \mu^*(E \setminus U) - \mu^*(U) + 3\varepsilon$$

Ricordando che $\mu^*(E \setminus U) \leq \mu^*(E \triangle U) \leq \varepsilon$ e $\mu^*(E \cap U) - \mu^*(U) \leq 0$ si ha la tesi:

$$\mu^*(O \setminus E) \leq \mu^*(E \cap U) + \mu^*(E \setminus U) - \mu^*(U) + 3\varepsilon \leq 4\varepsilon$$

Abbiamo provato, sotto l'ipotesi $\mu^*(E) < \infty$ le seguenti implicazioni

$$E \in \mathscr{L} \Longrightarrow (1) \Longleftrightarrow (5)$$

D'ora in avanti consideriamo $\mu^*(E)$ qualunque. Proviamo intanto $E \in \mathscr{L} \Rightarrow (1)$. Sia E misurabile, allora, per la σ-finitezza di $\mathbb{R}^n$, $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$ con $\{E_k\}_{k=1}^{\infty}$ una successione di insiemi tutti di misura finita. Inoltre, per quanto dimostrato precedentemente

$$\forall\varepsilon > 0, \forall k \in \mathbb{N}, \exists O_k \text{ aperto tale che } E_k \subseteq O_k \text{ e } \mu^*(O_k \setminus E_k) \leq \varepsilon \cdot 2^{-k}$$

Definiamo dunque $O \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{k=1}^{\infty} O_k$; si ha che O è aperto poiché unione di aperti ed inoltre $E \subseteq O$. Inoltre, dall'essere $O \setminus E = \bigcup_{k=1}^{\infty} (O_k \setminus E_k)$ si ottiene

$$\mu^*(O \setminus E) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(O_k \setminus E_k) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon \cdot 2^{-k} = \varepsilon$$

e dunque si ha la tesi. Proviamo ora (1) $\Longrightarrow$ (3). Infatti sia $\varepsilon = \frac{1}{m}$. Allora, $\forall m \in \mathbb{N}$, $\exists O_m$ insieme aperto tale che $E \subseteq O_m$ e $\mu^*(O_m \setminus E) \leq \frac{1}{m}$. Definiamo $G \overset{\text{def}}{=} \bigcap_{m=1}^{\infty} O_m$; ovviamente si ha che $G \in \mathscr{G}_\delta$ e che $E \subseteq G$. Inoltre

$$\forall\, m \in \mathbb{N},\ \mu^*(G \setminus E) \leq \mu^*(O_m \setminus E) \leq \frac{1}{m} \quad \Rightarrow \quad \mu^*(G \setminus E) = 0$$

A questo punto, dimostriamo che (3) $\Longrightarrow E \in \mathscr{L}$, chiudendo così un primo cerchio di implicazioni. Sia dunque E un insieme e G un insieme ottenuto da intersezioni numerabili di aperti tale che $\mu^*(G \setminus E) = 0$. Definiamo $F \overset{\text{def}}{=} G \setminus E$, allora $\mu^*(F) = 0$. Per la completezza di $\mathscr{L}^n$ si ha che F è misurabile. Inoltre, anche G è misurabile poiché è un boreliano. Pertanto, $E = G \setminus F$ è misurabile.

Seguendo un percorso simile, dimostriamo che $E \in \mathscr{L} \Longrightarrow$ (2). Infatti, per quanto dimostrato precedentemente, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists O$ aperto tale che $\complement(E) \subseteq O$ e $\mu^*\big(O \setminus \complement(E)\big) \leq \varepsilon$. Sia dunque $F \overset{\text{def}}{=} \complement(O)$. F è chiuso, $F \subseteq E$ ed inoltre $\big(O \setminus \complement(E)\big) = E \setminus F$. Dunque si ha che $\mu^*(E \setminus F) = \mu^*\big(O \setminus \complement(E)\big) \leq \varepsilon$ e pertanto la tesi è dimostrata.
Utilizzando quest'ultima affermazione, possiamo dimostrare la quarta. Proviamo (2) $\Longrightarrow$ (4).

$$\forall m \in \mathbb{N},\ \exists F_n \text{ chiuso},\ F_n \subseteq E,\ \mu^*(E \setminus F_n) \leq \frac{1}{m}$$

Definiamo allora $F \overset{\text{def}}{=} \bigcup_{m=1}^{\infty} F_m$, pertanto possiamo dire che $F \in \mathscr{F}_\delta$ e $F \subseteq E$. Inoltre,

$$\forall\, m \in \mathbb{N},\ \mu^*(E \setminus F) \leq \mu^*(E \setminus F_m) \leq \frac{1}{m} \quad \Rightarrow \quad \mu^*(E \setminus F) = 0$$

Per concludere la dimostrazione, è necessario solo dimostrare che (4) $\Longrightarrow E \in \mathscr{L}$. Sia dunque E un insieme e $F \in \mathscr{F}_\delta$ tale che $F \subseteq E$ e $\mu^*(E \setminus F) = 0$. Definiamo allora $H \overset{\text{def}}{=} E \setminus F$, dunque $E = F \cup H$. Per la completezza di $\mathscr{L}^n$ si ha che H è misurabile, inoltre F è misurabile perché boreliano. Dunque E è misurabile poiché unione di di due insiemi misurabili. Pertanto tutte le implicazioni sono state verificate e il teorema è dimostrato. $\square$

Corollario 2.12. $(\mathbb{R}^n, \mathscr{L}, \mu)$ *è il completamento di* $(\mathbb{R}^n, \mathscr{B}, \mu)$.

Dimostrazione. Per esercizio. $\square$

2.3 Insiemi non misurabili secondo Lebesgue

È lecito ora chiedersi se esistano insiemi non misurabili secondo Lebesgue. Mediante l'uso dell'assioma della scelta dimostreremo l'esistenza di tali insiemi.

Definizione 2.9. *Sia* $E \subseteq \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$*; allora con la scrittura* $E + y$ *indichiamo l'insieme* $E + y \overset{\text{def}}{=} \{z \in \mathbb{R} \,:\, z = x + y, \forall x \in E\}$

Lemma 2.13. *Si $E \subseteq \mathbb{R}$ un insieme misurabile, allora $\forall y \in \mathbb{R}$ si ha che anche $E + y$ è misurabile e vale $\mu(E) = \mu(E + y)$. Più brevemente, la misura di Lebesgue è invariante per traslazioni.*

Dimostrazione. Si verifica prima sugli intervalli, dopo di che si verifica che per ogni $E \subset \mathbb{R}$ $\mu^*(E) = \mu^*(E + y)$. □

Definizione 2.10. *Si consideri l'intervallo $[0, 1[$; su questo definiamo l'operazione "somma modulo 1" nel modo seguente:*

$$\forall x, y \in [0, 1[\ ,\ x \overset{\circ}{+} y \overset{\text{def}}{=} x + y - [x + y] = \begin{cases} x + y & \text{se } x + y < 1 \\ x + y - 1 & \text{se } x + y \geq 1 \end{cases}$$

qui $[z]$ indica la parte intera del numero reale z.

Definizione 2.11. *Sia $E \subseteq [0, 1[\,,\ y \in [0, 1[$; allora con la scrittura $E \overset{\circ}{+} y$ indichiamo l'insieme $E \overset{\circ}{+} y \overset{\text{def}}{=} \left\{z \in \mathbb{R} : z = x \overset{\circ}{+} y, \forall x \in E\right\}$.*

Lemma 2.14. *Sia $E \subseteq [0, 1[$ un insieme misurabile. Allora $\forall y \in [0, 1[$ si ha che l'insieme $E \overset{\circ}{+} y$ è ancora un sottoinsieme di $[0, 1[$, è misurabile e vale $\mu(E) = \mu\left(E \overset{\circ}{+} y\right)$.*

Dimostrazione. Per esercizio. □

Introduciamo su $[0, 1[$ la seguente relazione d'equivalenza:

$$x \sim y \quad \Leftrightarrow \quad (x - y) \in \mathbb{Q}$$

e consideriamo dunque l'insieme quoziente $K \overset{\text{def}}{=} [0, 1[/\sim$. Per l'assioma della scelta esiste una funzione $f : K \mapsto [0, 1[$ tale che associa ad ogni classe $C \in K$ un elemento $c \in C$, ovvero $f(C) = c$. Sia dunque $T \overset{\text{def}}{=} f(K)$ il codominio di f. Si ha che $T \subseteq [0, 1[$.

Teorema 2.15. *L'insieme T precedentemente definito* non *è misurabile secondo Lebesgue.*

Dimostrazione. Sia r un numero razionale tale che $r \in]0, 1[\cap \mathbb{Q}$. Si ha che $T \cap \left(T \overset{\circ}{+} r\right) = \emptyset$ per come è stato definito T. Inoltre, per la medesima ragione, si ha che $\bigcup_{r \in [0,1[\cap\mathbb{Q}} (T \overset{\circ}{+} r) = [0, 1[$. Supponiamo per assurdo che T sia misurabile; allora si ha che

$$\sum_{r \in [0,1[\cap\mathbb{Q}} \mu\left(T \overset{\circ}{+} r\right) = \mu([0, 1[) = 1$$

Tuttavia, se $\mu(T) = 0$ allora

$$\sum_{r \in [0,1[\cap\mathbb{Q}} \mu\left(T \overset{\circ}{+} r\right) = 0 \neq \mu([0, 1[) = 1$$

e, viceversa, se $\mu(T) > 0$ allora

$$\sum_{r \in [0,1[\cap \mathbb{Q}} \mu\left(T \overset{\circ}{+} r\right) = +\infty \neq \mu([0,1[) = 1$$

il che è assurdo. □

Osservazione. *Si noti come nella dimostrazione precedente non sia utilizzata alcuna proprietà legata alla misura di Lebesgue ad eccezione dell'invarianza per traslazioni. Ciò implica che qualsiasi misura su $\mathbb{R}$ invariante per traslazione per la quale T sia misurabile è tale che o ogni insieme misurabile è di misura nulla o ogni intervallo ha misura infinita.*

Osserviamo poi le seguenti proprietà dell'insieme T.

Proposizione 2.16. *Per ogni $E \subset T$, se E è misurabile allora $\mu(E) = 0$.*

Dimostrazione. Sia ha che $\bigcup_{r \in \mathbb{Q} \cap [0,1)} (E + r)$ è misurabile, e tutti gli insiemi $E + r$, $r \in \mathbb{Q} \cap [0,1)$ sono a due a due disgiunti. Quindi

$$1 \geq \mu\left(\bigcup_{r \in \mathbb{Q} \cap [0,1)} (E + r)\right) = \sum_{r \in \mathbb{Q} \cap [0,1)} \mu(E) \Longrightarrow \mu(E) = 0$$

□

Proposizione 2.17. *Per ogni E misurabile in $\mathbb{R}$ tale che $\mu(E) > 0$ esiste $F \subset E$ non misurabile.*

Dimostrazione. Esiste almeno un $n \in \mathbb{Z}$ tale che $E \cap [n, n+1)$ ha misura positiva. A meno di una traslazione si può supporre $n = 0$. Allora

$$E \cap [0,1) = \bigcup_{r \in \mathbb{Q} \cap [0,1)} (E \cap (T + r))$$

Proviamo che esiste almeno un r tale che $E \cap (T + r)$ non è misurabile. Per assurdo se lo fossero tutti:

$$\mu(E \cap (T + r)) = 0, \qquad \forall\, r \in \mathbb{Q} \cap [0,1)$$

e quindi

$$\mu(E \cap [0,1)) = 0,$$

il che è assurdo. □

Capitolo 3

Estensioni di misure

Nel precedente capitolo abbiamo visto come costruire la misura di Lebesgue a partire dalla funzione lunghezza sugli intervalli. In un certo senso, noi abbiamo imposto la misura sugli intervalli sulla base di una nozione geometrica ingenua e quindi abbiamo esteso questa ad una classe di insiemi molto più vasta.

In questo capitolo ci occupiamo di esaminare la questione in modo più astratto, cercando di capire quali siano le condizioni da imporre su una famiglia di insiemi e sulla funzione che definiamo su di essi affinché si possa estendere ad una misura.

3.1 Teorema di estensione

Definizione 3.1. *Sia $\mathscr{A}$ un'algebra su un insieme $\mathbb{X}$. Si definisce "misura sull'algebra $\mathscr{A}$" una funzione d'insieme $\mu : \mathscr{A} \mapsto [0, \infty]$ tale che*

- $\mu(\emptyset) = 0$;
- *Sia $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ una successione di insiemi a due a due disgiunti di $\mathscr{A}$ tale che $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathscr{A}$, allora $\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$.*

Proposizione 3.1. *Una misura su un'algebra è sia monotona che finitamente additiva.*

Lemma 3.2. *Sia $A \in \mathscr{A}$ e $\{A_i\}_{i=1}^{\infty} \subseteq \mathscr{A}$ una successione di insiemi tale che $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$. Allora $\mu(A) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$.*

Dimostrazione. Poniamo $E_i \stackrel{\text{def}}{=} A_i \cap A$ segue che $E_i \in \mathscr{A}$ ed inoltre $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$. Per la proposizione 1.7 si ha che $\exists \{B_i\}_{i=1}^{\infty} \subseteq \mathscr{A}$ successione di insiemi tali che $\forall i \in \mathbb{N}$, $B_i \subseteq E_i$ e $\forall i, j \in \mathbb{N}, i \neq j$, $B_i \cap B_j = \emptyset$ vale che $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$. Per la seconda proprietà delle misure sulle algebre si ha $\mu(E) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(B_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} A_i$ e pertanto la dimostrazione è conclusa. $\square$

Definizione 3.2. *Sia μ una misura da un'algebra $\mathscr{A}$ su uno spazio $\mathbb{X}$; per ogni $A \subseteq \mathbb{X}$ definiamo la funzione d'insieme*

$$\mu^*(A) \stackrel{\text{def}}{=} \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) \, : \, \{A_i\} \subseteq \mathscr{A}, \, A \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right\}$$

Questa funzione si dice "misura esterna indotta dalla misura su un'algebra μ".

Teorema 3.3. *La funzione μ^* precedentemente definita è una misura esterna. Inoltre, se $A \in \mathscr{A}$, si ha che $\mu^*(A) = \mu(A)$.*

Dimostrazione. Per poter dimostrare il teorema, è necessario prima dimostrare che per ogni $A \in \mathscr{A}$ si ha $\mu^*(A) = \mu(A)$. Ovviamente vale che $\mu^*(A) \leq \mu(A)$ per la definizione di μ^*; inoltre, se $\mu^*(A) = +\infty$, si ottiene l'uguaglianza e la tesi è dimostrata. Restringiamoci dunque a considerare il caso in cui $\mu^*(A) < +\infty$. Per la definizione di μ^* si ha che $\forall \varepsilon > 0, \exists \{A_i\}_{i=1}^{\infty} \subseteq \mathscr{A}$ tale che $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ e $\sum_{i=1}^{\infty} A_i \leq \mu^*(A) + \varepsilon$. Per il lemma 3.2 dunque si ha

$$\mu(A) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) \leq \mu^*(A_i) + \varepsilon$$

e, per l'arbitrarietà di ε si ha la tesi.

Per dimostrare ora la prima parte del teorema dovremo dimostrare che μ^* è monotona e numerabilmente subadditiva. Per quanto riguarda la monotonia, siano A, B due insiemi tali che $A \subseteq B$, allora ogni ricoprimento di B ricopre anche A e pertanto $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$.

La parte più significativa è rappresentata dalla subadditività numerabile. Supponiamo dunque essere $E \subseteq \mathbb{X}$ un generico insieme e $\{E_i\}_{i=1}^{\infty}$ una successione di insiemi tali che $E \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$, desideriamo dimostrare che $\mu^*(E) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(E_i)$. Se $\exists i \, : \, \mu^*(E_i) = +\infty$ allora la precedente disuguaglianza è banalmente vera. Possiamo dunque restringerci a studiare il caso in cui $\forall i \in \mathbb{N}, \mu^*(E_i) < \infty$. Fissato $\varepsilon > 0$ si ha che

$$\forall i \in \mathbb{N}, \exists \left\{A_k^i\right\}_{k=1}^{\infty} \subseteq \mathscr{A} \text{ tale che } E_i \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} A_k^i \text{ e } \sum_{k=1}^{\infty} \mu\left(A_k^i\right) \leq \mu^*(E_i) + \varepsilon \cdot 2^{-i}$$

Dunque si ha $E \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k^i \right) = \bigcup_{i=1,k=1}^{\infty} A_k^i$ e pertanto

$$\mu^*(E) \leq \sum_{i,k=1}^{\infty} \mu\left(A_k^i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \mu\left(A_k^i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \left(\mu^*(E_i) + \varepsilon \cdot 2^{-i}\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(E) + \varepsilon$$

Dalla disuguaglianza appena provata $\mu^*(E) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(E) + \varepsilon$ e dall'arbitrarietà di ε si ottiene la tesi. $\square$

Lemma 3.4. *Gli insiemi di $\mathscr{A}$ sono μ^*-misurabili.*

Dimostrazione. Sia $A \in \mathscr{A}$ e sia $E \subseteq \mathbb{X}$ un generico insieme tale che $\mu^*(E) \leq \infty$. Esiste $\{A_i\}_{i=1}^{\infty} \subseteq \mathscr{A}$ tale che $E \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ e $\sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) \leq \mu^*(E) + \varepsilon$. Dato che $A \in \mathscr{A}$ e $\forall i \in \mathbb{N}$, $A_i \in \mathscr{A}$ vale che $\mu(A_i) = \mu(A \cap A_i) + \mu(A_i \setminus A)$. Inolte

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i \cap A) + \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i \setminus A) \geq \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \setminus A)$$

Essendo $\mu^*(E) + \varepsilon \geq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$ si ha che $\mu^*(E) + \varepsilon \geq \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \setminus A)$ e per l'arbitrarietà di ε si ottiene $\mu^*(E) \geq \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \setminus A)$ e quindi la tesi. $\square$

Si ripropone qui il medesimo discorso già visto nel caso dei boreliani. Sia infatti $\mathscr{M}$ la σ-algebra degli insiemi μ^*-misurabili, allora avremo, per il lemma precedente, $\mathscr{A} \subseteq \mathscr{M}$. Inoltre, definiamo con $\mathscr{B}$ la σ-algebra generata da $\mathscr{A}$ e con $\mathscr{A}_\sigma$ la famiglia delle unioni numerabili di elementi di $\mathscr{A}$, con $\mathscr{A}_{\sigma\delta}$ la famiglia di intersezioni numerabili di unioni numerabili di insiemi di $\mathscr{A}$ e così avanti. Allora, in modo analogo a quanto accade con gli aperti di $\mathbb{R}$, vale la seguente catena di inclusioni

$$\mathscr{A} \subseteq \mathscr{A}_\sigma \subseteq \mathscr{A}_{\sigma\delta} \subseteq \ldots \subseteq \mathscr{B} \subseteq \mathscr{M}$$

Proposizione 3.5. *Sia μ una misura sull'algebra $\mathscr{A}$ e sia μ^* la misura esterna indotta da μ. Allora $\forall E \subseteq \mathbb{X}$, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists A \in \mathscr{A}_\sigma$ tale che $E \subseteq A$ e, $\mu^*(A) \leq \mu^*(E) + \varepsilon$. Inoltre $\exists B \in \mathscr{A}_{\sigma\delta}$ tale che $E \subseteq B$ e $\mu^*(B) = \mu^*(E)$.*

Dimostrazione. Se $\mu^*(E) = \infty$ allora basta scegliere $A = B = \mathbb{X}$ e il problema è risolto. Supponiamo ora invece che $\mu^*(E) < \infty$. Per definizione di misura esterna si ha che $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \{A_i\}_{i=1}^{\infty} \subseteq \mathscr{A}$ tale che $E \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ e $\sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) \leq \mu^*(E) + \varepsilon$. Definiamo dunque $A \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$, si ha che $A \in \mathscr{A}_\sigma$ ed inoltre

$$\mu^*(A) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) \leq \mu^*(E) + \varepsilon$$

Si ha dunque dimostrato l'esistenza la prima parte del teorema.

Per dimostrare l'esistenza di B si fissa $\forall m \in \mathbb{N}$, $\varepsilon = \frac{1}{m}$ e si definisce con A_m un insieme in $\mathscr{A}_\sigma$ tale che $E \subseteq A_m$ e $\mu^*(A_m) \leq \mu^*(E) + \frac{1}{m}$ sfruttando l'affermazione del teorema già dimostrata. Definiamo inoltre $B \stackrel{\text{def}}{=} \bigcap_{m=1}^{\infty} A_m$. Essendo $\forall m \in \mathbb{N}$, $\mu^*(B) \leq \mu^*(A_m) \leq \mu^*(E) + \frac{1}{m}$, si ha che $\mu^*(B) \leq \mu^*(E)$; inoltre $E \subseteq B$ e quindi $\mu^*(E) \leq \mu^*(B)$. Dalle due diseguaglianze si ottiene $\mu^*(E) = \mu^*(B)$ e pertanto la tesi. $\square$

Corollario 3.6. *Sia* $E \subseteq \mathbb{X}$ *tale che* $\mu^*(E) = 0$*, allora* $\exists B \in \mathscr{A}_{\sigma\delta}$ *tale che* $E \subseteq B$ *e* $\mu^*(B) = 0$*.*

Lemma 3.7. *Sia* E *un insieme tale che* $\mu^*(E) < \infty$*, allora* $E \in \mathscr{M}$ *se e solo se* $E = A \setminus B$ *con* $A \in \mathscr{A}_{\sigma\delta}$ *e* B *tale che* $\mu^*(B) = 0$*.*

Dimostrazione. Sia $E = A \setminus B$ con $A \in \mathscr{A}_{\sigma\delta}$ e B tale che $\mu^*(B) = 0$. Essendo $B \in \mathscr{B}$ poichè μ^* è una misura completa come già visto nel teorema 1.19 e $A \in \mathscr{M}$ per la catena di inclusioni precedente, si ha $E \in \mathscr{M}$.

Viceversa, sia $E \in \mathscr{M}$ tale che $\mu^*(E) < \infty$. Allora, per la proposizione 3.5, $\exists A \in \mathscr{A}_{\sigma\delta}$ tale che $E \subseteq A$ e $\mu^*(A) = \mu^*(E)$. Sia $B \stackrel{\text{def}}{=} A \setminus E$; allora $B \in \mathscr{M}$ in quanto differenza di due insiemi misurabili. Inoltre, essendo B ed E disgiunti, $\mu^*(A) = \mu^*(E) + \mu^*(B)$ e quindi $\mu^*(B) = \mu^*(A) - \mu^*(E) = 0$ e pertanto il lemma è dimostrato. □

Teorema 3.8. *Sia* μ *una misura su un'algebra* A *su* $\mathbb{X}$ *che sia* σ*-finita. Allora* $E \in \mathscr{M}$ *se e solo se* $E = A \setminus B$ *con* $A \in \mathscr{A}_{\sigma\delta}$ *e* B *tale che* $\mu^*(B) = 0$*.*

Dimostrazione. Se $E = A \setminus B$ allora, ripetendo il ragionamento già fatto per il lemma precedente, $E \in \mathscr{M}$.

La parte significativa della dimostrazione risiede dunque nel viceversa. Supponiamo dunque $E \in \mathscr{M}$. Sia inoltre $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ una famiglia numerabile di insiemi tali che $X_i \in \mathscr{A}$, $\mu(X_i) < \infty$ e $\bigcup_{i=1}^{\infty} X_i = \mathbb{X}$ la cui esistenza è garantita dalla σ-finitezza di μ. Poniamo $\forall i \in \mathbb{N}$, $E_i \stackrel{\text{def}}{=} E \cap X_i$. Allora, per la proposizione 3.5, $\forall k = 1, 2, \ldots,$ $\exists A_i^k \in \mathscr{A}_\sigma$ tale che $E_i \subseteq A_i^k$ e $\mu^*\left(A_i^k\right) \leq \mu^*(E_i) + \dfrac{2^{-i}}{k}$. Definiamo inoltre $A_k \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i^k$; vale che $\forall k = 1, 2, \ldots, A_k \in \mathscr{A}$. Essendo tutti insiemi misurabili, possiamo dire che $\forall i \in \mathbb{N}$ vale che $\mu^*\left(A_i^k \setminus E_i\right) \leq \dfrac{2^{-i}}{k}$. Inoltre vale che $A^k \setminus E = \bigcup_{i=1}^{\infty} \left(A_i^k \setminus E_i\right)$ e pertanto $\mu^*\left(A^k \setminus E\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \dfrac{2^{-i}}{k} = \dfrac{1}{k}$. Sia $A \stackrel{\text{def}}{=} \bigcap_{k=1}^{\infty} A^k$, allora $A \in \mathscr{A}_{\sigma\delta}$ e $E \subseteq A$. Si ha dunque che $\forall k = 1, 2, \ldots,$ $\mu^*(A \setminus E) \leq \mu^*(A_k \setminus E) \leq \frac{1}{k}$ e quindi $\mu^*(A \setminus E) = 0$. Sia infine $B = A \setminus E$, allora $E = A \setminus B$ con $\mu^*(B) = 0$ e $A \in \mathscr{A}_{\sigma\delta}$. □

Teorema 3.9. (Teorema di estensione di Caratheodory)
Sia μ *una misura su un'algebra* $\mathscr{A}$ *e su uno spazio* $\mathbb{X}$ *e sia* μ^* *la misura esterna indotta da* μ*. Allora*

1. *La misura* $\bar{\mu}$ *generata da* μ^* *è una misura che estende* μ *alla* σ*-algebra* $\mathscr{B}$ *generata da* $\mathscr{A}$*.*
2. *Se* μ *è finita (*σ*-finita) allora* μ^* *è finita (*σ*-finita).*
3. *Se* μ *è* σ*-finita allora ogni posibile estensione* $\tilde{\mu}$ *di* μ *a* $\mathscr{B}$ *coincide con* $\bar{\mu}$*.*

Dimostrazione. Si fornisce la dimostrazione dei tre punti del teorema.

1. Il primo punto è stato già dimostrato. In particolar modo deriva dall'inclusione secondo cui $\mathscr{B} \subseteq \mathscr{M}$.

2. Questo punto è ovvio. Infatti si ha che $\mathbb{X} \in \mathscr{A}$ e dunque, poiché si ha precedentemente dimostrato che $\forall A \in \mathscr{A}$, $\mu^* (A) = \mu (A)$, si ha che dall'essere $\mu (\mathbb{X}) < \infty$ segue $\mu^* (\mathbb{X}) < \infty$. Nel caso in cui invece μ sia σ-finita, allora la medesima successione di insiemi che ricopre $\mathbb{X}$ aventi somma di misure finita è un ricoprimento anche per la misura eserna.

3. Supponiamo essere $\tilde{\mu}$ un'altra misura su $\mathscr{B}$ tale che $\tilde{\mu}_{|\mathscr{A}} = \mu$. Sia $A \in \mathscr{A}_\sigma$, dunque $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ con $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ famiglia numerabile di insiemi in $\mathscr{A}$ a due a due disgiunti. Dunque

$$\tilde{\mu} (A) = \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{\mu} (A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \bar{\mu} (A_i) = \bar{\mu} (A) \quad \Rightarrow \quad \tilde{\mu}_{|\mathscr{A}_\sigma} = \bar{\mu}_{|\mathscr{A}_\sigma}$$

Vogliamo dimostrare ora che ogni estensione $\tilde{\mu}$ di μ a $\mathscr{B}$ è tale che $\forall D \in \mathscr{B}$ sia $\tilde{\mu} (D) \leq \bar{\mu} (D)$. Questo risultato è indipendente dalla σ-finitezza di μ.

Sia dunque $B \in \mathscr{B}$. Se $\bar{\mu} (B) = \infty$ allora si ha che $\tilde{\mu} (B) \leq \bar{\mu} (B)$; supponiamo pertanto $\bar{\mu} (B) < \infty$. Per la proposizione 3.5, $\exists A \in \mathscr{A}_\sigma$ tale che $B \subseteq A$ e $\bar{\mu} (A) \leq \bar{\mu} (B) + \varepsilon$. Dunque

$$\tilde{\mu} (B) \leq \tilde{\mu} (A) = \bar{\mu} (A) \leq \bar{\mu} (B) + \varepsilon$$

e, per l'arbitrarietà di ε si ha $\tilde{\mu} (B) \leq \bar{\mu} (B)$.

Dimostriamo ora invece che $\bar{\mu} \leq \tilde{\mu}$; qui facciamo ricorso all'ipotesi che μ sia σ-finita. Infatti siano A e B come già definiti nella parte precedente della dimostrazione (con $\bar{\mu} (B) < \infty$), allora, per il teorema 3.8, si ottiene che $\mu^* (A \setminus B) \leq \varepsilon$ e pertanto, essendo $A \setminus B \in \mathscr{B}$ perché differenza di elementi di $\mathscr{B}$, si ha

$$\tilde{\mu} (A \setminus B) \leq \bar{\mu} (A \setminus B) = \mu^* (A \setminus B) \leq \varepsilon$$

Valgono dunque le seguenti maggiorazioni

$$\bar{\mu} (B) \leq \bar{\mu} (A) = \tilde{\mu} (A) \leq \tilde{\mu} (B) + \tilde{\mu} (A \setminus B) \leq \tilde{\mu} (B) + \varepsilon$$

da cui, ancora una volta per l'arbitrarietà di ε, si ottiene $\bar{\mu} (B) \leq \tilde{\mu} (B)$.

È necessario ora estendere il risultato ottenuto nel caso in cui $\mu^* (B) = \infty$, che non è stato ancora considerato. Sia dunque $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ una successione di insiemi misurabili a due a due disgiunti tali che $\forall i = 1, 2, \ldots$, $\bar{\mu} (X_i) < \infty$ e tali che valga $\bigcup_{i=1}^{\infty} X_i = \mathbb{X}$.

Definiamo inoltre la famiglia di insiemi $B_i \stackrel{\text{def}}{=} X_i \cap B$ in modo che si verifichi che $B = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$.

Possiamo dunque concludere considerando che

$$\tilde{\mu}(B) = \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{\mu}(B_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \bar{\mu}(B_i) = \bar{\mu}(B)$$

e pertanto le due misure coincidono su tutto $\mathscr{B}$.

□

Esercizio 3.1. *Sia $\tilde{\mu}$ un'estensione di μ a una σ-algebra $\mathscr{D}$ che contiene $\mathscr{A}$. Si dimostri che $\forall D \in \mathscr{D}$, $\tilde{\mu}(D) \leq \mu^*(D)$.*

Esercizio 3.2. *Sia $\tilde{\mu}$ un'estensione di μ a $\mathscr{M}$. Allora $\tilde{\mu}(E) = \bar{\mu}(E)$, $\forall E \in \mathscr{M}$ tale che $\bar{\mu}(E) < \infty$. Inoltre, se μ è σ-finita, $\tilde{\mu} = \bar{\mu}$ su $\mathscr{M}$.*

Definizione 3.3. *Sia μ^* una misura esterna su un insieme $\mathbb{X}$, sia $\bar{\mu}$ la misura generata da μ^* e sia $\mathscr{A}$ la σ-algebra degli insiemi μ^*-misurabili. La misura esterna μ^* si dice "misura regolare" se $\forall E \subseteq \mathbb{X}$, $\exists A \in \mathscr{A}$ tale che $E \subseteq A$ e $\mu^*(E) = \mu^*(A)$.*

Esercizio 3.3. *Sia μ^* una misura esterna su $\mathbb{X}$, sia $\bar{\mu}$ la misura generata da μ^* e sia $\mathscr{A}$ la σ-algebra degli insiemi μ^*-misurabili. Sia ancora μ^+ la misura esterna indotta dalla misura $\bar{\mu}$. Si provi che $\forall E \subseteq \mathbb{X}$, $\mu^*(E) \leq \mu^+(E)$. Si dimostri inoltre che si ha $\forall E \subseteq \mathbb{X}$, $\mu^*(E) = \mu^+(E)$ se e solo se la misura esterna μ^* è regolare.*

Esercizio 3.4. *Sia μ^* una misura esterna indotta da una misura μ su un algebra $\mathscr{A}$. Allora μ^* è regolare.*

3.2 Semialgebre

Definizione 3.4. *Una famiglia $\mathcal{C}$ di sottoinsiemi di $\mathbb{X}$ si dice "semialgebra" se*

1. *$\forall A, B \in \mathcal{C}$, $A \cap B \in \mathcal{C}$;*
2. *$\forall A \in \mathcal{C}$, $\complement(A)$ è un'unione finita disgiunta di elementi di $\mathcal{C}$.*

Proposizione 3.10. *Se una semialgebra $\mathcal{C}$ è non vuota, allora $\emptyset \in \mathcal{C}$.*

Dimostrazione. Sia $A \in \mathcal{C}$ un insieme della semialgebra. Allora, per l'assioma 2 di $\mathcal{C}$, $\complement(A) = \bigcup_{i=1}^{n} B_i$ con B_i famiglia finita di insiemi a due a due disgiunti. Si ha che $A \cap B_1 = \emptyset$, e pertanto, poiché l'intersezione è un'operazione interna alla semialgebra, si ottiene la tesi $\emptyset \in \mathcal{C}$. □

Teorema 3.11. *Sia $\mathcal{C}$ una semialgebra su un insieme $\mathbb{X}$. Allora la famiglia di insiemi $\mathscr{A} \stackrel{\text{def}}{=} \{A \subseteq \mathbb{X} : A \text{ è unione finita disgiunta di elementi di } \mathcal{C}\}$ è l'algebra generata da $\mathcal{C}$.*

Dimostrazione. Sia $\mathscr{B}$ un'algebra tale che $\mathcal{C} \subseteq \mathscr{B}$; allora, poiché unione di elementi di $\mathscr{B}$ appartiene ancora a $\mathscr{B}$, si verifica che $\mathscr{A} \subseteq \mathscr{B}$. Se dunque si dimostra che $\mathscr{A}$ è un algebra si ha la tesi dato che abbiamo appena dimostrato che ogni altra algebra $\mathscr{B}$ è tale che $\mathscr{A} \subseteq \mathscr{B}$. Verifichiamo dunque che valgano i tre assiomi di un'algebra:

- Essendo $\emptyset \in \mathcal{C}$ si ha $\emptyset \in \mathscr{A}$.
- Siano A e B due insiemi appartenenti a $\mathscr{A}$. Allora, per definizione di $\mathscr{A}$, esistono due famiglie $\{A_i\}_{i=1}^n$ e $\{B_i\}_{i=1}^m$ di insiemi di $\mathcal{C}$ a due a due disgiunti tali che $A = \bigcup_{i=1}^n A_i$ e $B = \bigcup_{i=1}^m B_i$. Dunque si ha che

$$A \cap B = \left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) \cap \left(\bigcup_{j=1}^m B_j\right) = \bigcup_{i=1,j=1}^{n,m} (A_i \cap B_j)$$

  Siccome la famiglia degli insiemi $(A_i \cap B_j)$ appartiene a $\mathcal{C}$ per ogni coppia (i,j) e poiché si tratta di una famiglia di insiemi disgiunti si ha quindi dimostrato che $A \cap B \in \mathcal{C}$.
- Sia $A \in \mathcal{C}$, allora esiste una famiglia finita di insiemi a due a due disgiunti $\{A_i\}_{i=1}^n$ tale che $A = \bigcup_{i=1}^n A_i$; per le leggi di De Morgan si ha dunque che $\complement(A) = \bigcap_{i=1}^n \complement(A_i)$. Inoltre, per ogni i si ha che $\complement(A_i) = \bigcup_{j=1}^{m_i} B_{ij}$ con gli insiemi B_{ij} disgiunti rispetto a j una volta fissato i. Senza ledere di generalità possiamo supporre che $m_i = m$ per ogni i; se così non fosse, è sufficiente scegliere $m \stackrel{\text{def}}{=} \max_{i\in\{1,\ldots,n\}} \{m_i\}$ e completare le famiglie con degli insiemi vuoti in modo opportuno. Dunque si ha che

$$\complement(A) = \bigcap_{i=1}^n \left(\bigcup_{j=1}^m B_{ij}\right) = \bigcup_{j=1}^m \left(\bigcap_{i=1}^n B_{ij}\right)$$

  Ricordando che $\bigcap_{i=1}^m B_{ij}$ appartiene a $\mathcal{C}$ per ogni j, si ha che $\complement(A)$ è unione finita per di elementi di $\mathcal{C}$. Dimostriamo che questa unione è anche disgiunta. Infatti

$$\left(\bigcap_{i=1}^n B_{ij}\right) \cap \left(\bigcap_{i=1}^n B_{ik}\right) = \bigcap_{i=1}^n (B_{ij} \cap B_{ik}) = \bigcap_{i=1}^n (\emptyset) = \emptyset$$

  e quindi $\complement(A) \in \mathcal{C}$.

□

Definizione 3.5. *Sia $\mathcal{C}$ una semialgebra su uno spazio $\mathbb{X}$. Una funzione d'insieme $\mu : \mathcal{C} \mapsto [0, +\infty]$ si dice "misura su una semialgebra" se vale che*

- $\mu(\emptyset) = 0$;
- *sia $C \in \mathcal{C}$ un sottoinsieme di $\mathbb{X}$ e sia $\{C_i\}_{i=1}^n$ una famiglia finita di insiemi in $\mathcal{C}$ disgiunti tali che $C = \bigcup_{i=1}^n C_i$, allora $\mu(C) = \sum_{i=1}^n \mu(C_i)$;*
- *sia $C \in \mathcal{C}$ un sottoinsieme di $\mathbb{X}$ e sia $\{C_i\}_{i=1}^\infty$ una famiglia numerabile di insiemi in $\mathcal{C}$ disgiunti tali che $C = \bigcup_{i=1}^\infty C_i$, allora $\mu(C) \leq \sum_{i=1}^\infty \mu(C_i)$.*

Teorema 3.12. *Sia $\mathcal{C}$ una semialgebra ed $\mathscr{A}$ l'algebra generata da $\mathscr{C}$. Sia μ una misura sulla semialgebra $\mathcal{C}$, allora μ si estende in modo unico ad una misura sull'algebra $\mathscr{A}$.*

Dimostrazione. Sia $A \in \mathscr{A}$. Per quanto affermato dal teorema 3.11 si ha che esiste una famiglia finita di insiemi disgiunti $\{A_i\}_{i=1}^n$ tali che $\forall i \in \{1, ..., n\}$, $A_i \in \mathcal{C}$ e $A = \bigcup_{i=1}^n A_i$. Se esiste un estensione μ della misura, allora $\mu(A) = \sum_{i=1}^n \mu(A_i)$. Dimostriamo dunque che $\mu(A)$ non dipende dalla particolare scelta della famiglia $\{A_i\}_{i=1}^n$. Sia, a tal fine, $\{B_j\}_{j=1}^m$ una famiglia di insiemi disgiunti in $\mathcal{C}$ tale che anche qui valga $A = \bigcup_{j=1}^m B_j$. Per ogni $j \in \{1, ..., m\}$ si ha inoltre che $B_j \subseteq A$ e quindi

$$B_j = A \cap B_j = \left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) \cap B_j = \bigcup_{i=1}^n (A_i \cap B_j)$$

Ricordiamo che, trovandosi A_i e B_j in $\mathcal{C}$, anche gli insiemi $A_i \cap B_j$ appartengono a $\mathcal{C}$ per ogni possibile coppia di (i, j). Per come è stata definita una misura su una semialgebra si ha quindi che $\mu(B_j) = \sum_{i=1}^n \mu(A_i \cap B_j)$. Effettuando un ragionamento analogo ricavo anche che $\mu(A_i) = \sum_{j=1}^m \mu(A_i \cap B_j)$. In conclusione si ha che

$$\sum_{i=1}^n \mu(A_i) = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^m \mu(A_i \cap B_j)\right) = \sum_{j=1}^m \left(\sum_{i=1}^n \mu(A_i \cap B_j)\right) = \sum_{j=1}^m \mu(B_j)$$

Pertanto, si è appena dimostrato che la funzione che associa ad ogni elemento A di $\mathscr{A}$ la somma delle misure di un'arbitraria famiglia finita di elementi disgiunti di $\mathcal{C}$ che lo ricoprono è ben definita. Pertanto, se μ esiste, essa è unica perché deve sottostare alla precedente condizione. Rimane da dimostrare che la funzione μ definita come sopra è una misura.
Dimostriamo preliminarmente che la funzione μ è finitamente additiva. Siano $A_1, A_2, ..., A_k \in \mathscr{A}$ insiemi a due a due disgiunti. Appartenendo ad $\mathscr{A}$,

si ha che $A_i = \bigcup_{j=1}^{n} C_{ij}$ con $\{C_{ij}\}_{j=1}^{n}$ famiglia finita di insiemi in $\mathcal{C}$ a due a due disgiunti in j. Siccome gli insiemi A_i sono disgiunti, si ha inoltre che $\forall\,(i_1, j_1) \neq (i_2, j_2)\,,\, C_{i_1 j_1} \cap C_{i_2 j_2} = \emptyset$. Pertanto

$$A \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{i=1}^{k} A_k = \bigcup_{i=1}^{k} \left(\bigcup_{j=1}^{n} C_{ij} \right) = \bigcup_{i=1}^{k} \bigcup_{j=1}^{n} C_{ij}$$

ed essendo i C_{ij} disgiunti per quanto detto precedentemente

$$\mu\,(A) = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n} \mu\,(C_{ij}) = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n} \mu\,(C_{ij}) = \sum_{i=1}^{k} \mu\,(A_k)$$

e pertanto la finita additività è dimostrata. Come già visto nella proposizione 1.12, si ha che la finita additività implica la monotonia.
Rimane ora da dimostrare l'additività numerabile. Sia dunque $A \in \mathscr{A}$ con $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ e $A_i \in \mathscr{A}$ a due a due disgiunti. Sappiamo che $\forall i = 1, 2,$ *dots* esiste una famiglia finita di insiemi in $\mathcal{C}$ a due a due disgiunti $\{C_{ij}\}_{j=1}^{n(i)}$ tale che $A_i = \bigcup_{j=1}^{n} C_{ij}$. Per definizione di μ, si ha che $\mu\,(A_i) = \sum_{j=1}^{n(i)} \mu\,(C_{ij})$. Essendo tuttavia anche $A \in \mathcal{C}$, si ha che esiste una famiglia finita di insiemi disgiunti $\{B_\ell\}_{\ell=1}^{m} \subseteq \mathcal{C}$ tale che $A = \bigcup_{\ell=1}^{m} B_\ell$. Ne segue dunque che

$$B_\ell = \bigcup_{i=1}^{\infty} (A_i \cap B_\ell) = \bigcup_{\substack{i=1,\dots,\infty \\ j=1,\dots,n(i)}} (C_{ij} \cap B_\ell)$$

Si può verificare facilmente che, per ogni terna di indici, gli insiemi $C_{ij} \cap B_\ell \in \mathcal{C}$ e sono disgiunti. Da questo segue che

$$\mu\,(B_\ell) \leq \sum_{\substack{i=1,\dots,\infty \\ j=1,\dots,n(i)}} \mu\,(C_{ij} \cap B_\ell) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{n} \mu\,(C_{ij} \cap B_\ell)$$

$$\mu\,(A) = \sum_{\ell=1}^{m} \mu\,(B_\ell) \leq \sum_{\ell=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{n(i)} \mu\,(C_{ij} \cap B_\ell) \right)$$

Dall'essere inoltre $A_i = \bigcup_{\substack{j=1,\dots,n(i) \\ l=1,\dots,m}} (C_{ij} \cap B_\ell)$ si ha

$$\mu\,(A_i) = \sum_{j=1}^{n(i)} \sum_{\ell=1}^{m} \mu\,(C_{ij} \cap B_\ell)$$

ed infine

$$\mu(A) \leq \sum_{\ell=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{n(i)} \mu(C_{ij} \cap B_\ell) \right) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{\ell=1}^{m} \sum_{j=1}^{n(i)} \mu(C_{ij} \cap B_\ell) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$$

Si è dunque dimostrato che $\mu(A) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$. Rimane ora da affrontare la disuguaglianza inversa. Tuttavia, si ha che $\forall N \in \mathbb{N}$, $N > 1$, $\bigcup_{i=1}^{N} A_i \subseteq A$. Da questo segue che

$$\forall N \in \mathbb{N}, \sum_{i=1}^{N} \mu(A_i) = \mu\left(\cup_{i=1}^{N} A_i\right) \leq \mu(A)$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) = \lim_{N \to \infty} \sum_{i=1}^{N} \mu(A_i) \leq \mu(A)$$

E pertanto abbiamo dimostrato che $\sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) = \mu(A)$ e di conseguenza la funzione μ è una misura. $\square$

Capitolo 4

Funzioni misurabili

4.1 Misurabilità

Lemma 4.1. *Sia* $(\mathbb{X}, \mathscr{A}, \mu)$ *uno spazio con misura e si consideri una funzione* $f : \mathbb{X} \longrightarrow [-\infty, +\infty]$*. Allora le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

1. $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $\{x \in \mathbb{X} \, : \, f(x) > \alpha\} \in \mathscr{A}$
2. $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $\{x \in \mathbb{X} \, : \, f(x) \geq \alpha\} \in \mathscr{A}$
3. $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $\{x \in \mathbb{X} \, : \, f(x) < \alpha\} \in \mathscr{A}$
4. $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $\{x \in \mathbb{X} \, : \, f(x) \leq \alpha\} \in \mathscr{A}$

Dimostrazione. 1) $\Rightarrow$ 2) Per ogni α vale

$$\{x \in \mathbb{X} \, : \, f(x) \geq \alpha\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left\{x \in \mathbb{X} \, : \, f(x) > \alpha - \frac{1}{n}\right\}$$

2) $\Rightarrow$ 3)

$$\{x \in \mathbb{X} \, : \, f(x) < \alpha\} = \complement\big(\{x \in \mathbb{X} \, : \, f(x) \geq \alpha\}\big)$$

3) $\Rightarrow$ 4)

$$\{x \in \mathbb{X} \, : \, f(x) \leq \alpha\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left\{x \in \mathbb{X} \, : \, f(x) < \alpha + \frac{1}{n}\right\}$$

4) $\Rightarrow$ 1)

$$\{x \in \mathbb{X} \, : \, f(x) > \alpha\} = \complement\big(\{x \in \mathbb{X} \, : \, f(x) \leq \alpha\}\big)$$

□

Definizione 4.1. *Una funzione* $f : \mathbb{X} \longrightarrow [-\infty, +\infty]$ *si dice "misurabile" se verifica almeno una tra le quattro affermazioni del lemma 4.1.*

Proposizione 4.2. *Sia* $f : \mathbb{X} \longrightarrow [-\infty, +\infty]$ *una funzione misurabile, allora* $\forall \alpha \in [-\infty, +\infty]$ *si ha che* $\{x \in \mathbb{X} \, : \, f(x) = \alpha\} \in \mathscr{A}$*.*

Dimostrazione. Nel caso in cui $\alpha \in \mathbb{R}$, allora

$$\{x \in \mathbb{X} : f(x) = \alpha\} = \{x \in \mathbb{X} : f(x) \geq \alpha\} \cap \{x \in \mathbb{X} : f(x) \leq \alpha\}$$

Altrimenti, se $\alpha = \pm\infty$ si ha rispettivamente che

$$\{x \in \mathbb{X} : f(x) = +\infty\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x \in \mathbb{X} : f(x) > n\}$$

$$\{x \in \mathbb{X} : f(x) = -\infty\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x \in \mathbb{X} : f(x) < n\}$$

□

Proposizione 4.3. *Sia $f : \mathbb{X} \longrightarrow [-\infty, +\infty]$ una funzione, allora*

$$f \text{ è misurabile } \Leftrightarrow \begin{cases} 1.\ \forall A \subseteq \mathbb{R} \text{ aperto, } f^{-1}(A) \in \mathscr{A} \\ 2.\ f^{-1}(\{+\infty\}) \in \mathscr{A},\ f^{-1}(\{-\infty\}) \in \mathscr{A} \end{cases}$$

Dimostrazione. Sia f misurabile. Se $A \subseteq \mathbb{R}$ ed A è aperto, allora A è unione numerabile disgiunta di intervalli aperti: $A = \bigcup_{i=1}^{\infty}(a_i, b_i)$ (infatti ogni componente connessa di A è un intervallo aperto, ed esse possono essere al più in numero numerabile, perché contengono ciascuna un razionale distinto). Pertanto:

$$f^{-1}(A) = \bigcup_{i=1}^{\infty} f^{-1}\Big((a_i, b_i)\Big)$$

$$f^{-1}\Big((a_i, b_i)\Big) = \{x \in \mathbb{X} : a_i < f(x) < b_i\} = \{f > a_i\} \cap \{f < b_i\}$$

$$f^{-1}(A) = \bigcup_{i=1}^{\infty} \Big(\{f > a_i\} \cap \{f < b_i\}\Big) \in \mathscr{A}$$

La 2. vale per la proposizione precedente.
Viceversa, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$,

$$\{f > \alpha\} = \{f = +\infty\} \cup \{f^{-1}\Big((\alpha, +\infty)\Big) \in \mathscr{A}$$

dunque se valgono le due condizioni, f è misurabile. □

Teorema 4.4. *Sia $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ continua; allora f è misurabile su $(\mathbb{R}^n, \mathscr{L}, \mu)$.*

Dimostrazione. Le retroimmagini di aperti sono aperti, che sono boreliani, che sono particolari insiemi di Lebesgue. □

Teorema 4.5. *Sia $(\mathbb{X}, \mathscr{A}, \mu)$ uno spazio con misura qualsiasi, se f è misurabile, allora $\forall B \subseteq \mathbb{R}$ boreliano, $f^{-1}(B)$ è misurabile.*

Dimostrazione. Si considera la famiglia:

$$\mathscr{F} = \{C \subseteq f(\mathbb{X}) \, : \, f^{-1}(C) \in \mathscr{A}\}$$

Si osserva che $\mathscr{F}$ è una σ-algebra su $f(\mathbb{X})$ e inoltre essa contiene gli insiemi del tipo $(a,b) \cap f(\mathbb{X})$ dal momento che

$$f^{-1}\Big((a,b) \cap f(\mathbb{X})\Big) = \{f > a\} \cap \{f < b\} \in \mathscr{A}$$

perché f è misurabile.
Dunque $\mathscr{F}$ contiene gli aperti di $f(\mathbb{X})$ nella topologia indotta da $\mathbb{R}$, per cui $\mathscr{F}$ contiene la σ-algebra generata dagli aperti di $f(\mathbb{X})$, che è data da:

$$\{E \subseteq f(\mathbb{X}) \, : \, E = B \cap f(\mathbb{X}), \; B \in \mathscr{B}\}$$

Dal momento che se $B \in \mathbb{B}$, allora $f^{-1}(B) = f^{-1}\Big(B \cap f(\mathbb{X})\Big)$, si ha che la retroimmagine di ogni boreliano di $\mathbb{R}$ può essere espressa come retroimmagine di un elemento di $\mathscr{F}$, che è misurabile. $\square$

Definizione 4.2. *Sia $E \subseteq \mathbb{X}$, si dice "funzione caratteristica" di E la funzione*

$$\chi_E\,(x) = \begin{cases} 1 & se\ x \in E \\ 0 & se\ x \notin E \end{cases}$$

Proposizione 4.6. *Sia $(\mathbb{X}, \mathscr{A}, \mu)$ uno spazio con misura e E un sottoinsieme di $\mathbb{X}$. Allora E è misurabile $\Leftrightarrow$ la funzione χ_E è misurabile.*

Dimostrazione. Si ha che:

$$\{\chi_E > \alpha\} = \begin{cases} \mathbb{X} & \text{se } \alpha < 0 \\ E & \text{se } 0 \leq \alpha < 1 \\ \emptyset & \text{se } \alpha \geq 1 \end{cases}$$

In questo modo, se $f = \chi_E$ è misurabile, allora scelto $\alpha = 0$ si ha che $\{f > 0\} = E$ è misurabile; se E è misurabile, dal momento che $\emptyset$ è sempre misurabile, allora tutti gli insiemi di livello di χ_E lo sono. $\square$

Definizione 4.3. *Sia $f \in \mathbb{R}$, allora definiamo*

$$f^+ = \begin{cases} f & se\ f > 0 \\ 0 & se\ f \leq 0 \end{cases} \qquad e \qquad f^- = \begin{cases} 0 & se\ f > 0 \\ -f & se\ f \leq 0 \end{cases}$$

In questo modo:

$$|f| = f^+ + f^- \qquad f = f^+ - f^- \qquad f^+, f^- \geq 0$$

Esercizio 4.1. *Sia $f : \mathbb{X} \longrightarrow [-\infty, +\infty]$, allora f è misurabile $\Leftrightarrow$ f^+ e f^- sono misurabili.*

Esercizio 4.2. *Sia $f : \mathbb{X} \longrightarrow [-\infty, +\infty]$ una funzione misurabile, allora la funzione $|f|$ è misurabile.*

Esercizio 4.3. *Sia $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione monotona, allora f è misurabile rispetto a $\mathscr{L}$.*

Definizione 4.4. *Una funzione* $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *si dice semicontinua superiormente in* x *se* $\limsup_{y \to x} f(y) \leq f(x)$*. Si indica con s.c.s.*

Definizione 4.5. *Una funzione* $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *si dice semicontinua inferiormente in* x *se* $\liminf_{y \to x} f(y) \geq f(x)$*. Si indica con s.c.i.*

Lemma 4.7. $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ *è semicontiua inferiormente se e solo se* f *è continua quando su* $\mathbb{R}^n$ *si pone la topologia standard, mentre su* $\mathbb{R}$ *si pone la topologia delle semirette positive aperte:*

$$\tau^+ = \{(a, +\infty) \,:\, a \in \mathbb{R}\}$$

Esercizio 4.4. *Una funzione semicontinua inferiormente in ogni punto è misurabile. Un analogo risultato vale se* f *s.c.s. in ogni punto.*

Lemma 4.8. *Siano* f *e* g *due funzioni misurabili e si consideri l'insieme* $E = \{x \in \mathbb{X} : f(x) < g(x)\}$*. Allora* E *è misurabile.*

Dimostrazione. Sia $x \in E$, allora si ha che $f(x) < g(x)$. Pertanto $\exists\, r \in \mathbb{Q}$ tale che $f(x) < r < g(x)$. Dunque $x \in \Big(\{f < r\} \cap \{g > r\}\Big)$ e quindi

$$E \subseteq \bigcup_{r \in \mathbb{Q}} \Big(\{f < r\} \cap \{g > r\}\Big)$$

Sia ora $x \in \bigcup_{r \in \mathbb{Q}} \Big(\{f < r\} \cap \{g > r\}\Big)$, allora $\exists\, r \in \mathbb{Q}$ tale che $f(x) < r < g(x)$ e quindi $x \in E$, pertanto

$$E = \bigcup_{r \in \mathbb{Q}} \Big(\{f < r\} \cap \{g > r\}\Big)$$

Dunque E è unione numerabile di insiemi misurabili, quindi è misurabile. □

Lemma 4.9. *Sia* f *misurabile, allora* f^2 *è misurabile.*

Dimostrazione. Sia $\alpha \in \mathbb{R}$. Allora si ha che:

$$\{f^2 > \alpha\} = \begin{cases} \mathbb{X} & \text{se } \alpha < 0 \\ \{f > \sqrt{\alpha}\} \cup \{f < -\sqrt{\alpha}\} & \text{se } \alpha \geq 0 \end{cases}$$

e dunque tutti gli insiemi di livello sono misurabili. □

Definizione 4.6. *Siano* f *e* g *due funzioni da* $\mathbb{X}$ *a valori in* $[-\infty, +\infty]$*, e sia* $c \in [-\infty, +\infty]$ *fissato. Definiamo allora*

$$(f + g)(x) = \begin{cases} c & \textit{se } f(x) + g(x) \textit{ è una forma indeterminata} \\ f(x) + g(x) & \textit{altrimenti} \end{cases}$$

$$(f \cdot g)(x) = \begin{cases} c & \textit{se } f(x) \cdot g(x) \textit{ è una forma indeterminata} \\ f(x) \cdot g(x) & \textit{altrimenti} \end{cases}$$

Teorema 4.10. *Siano* f *e* g *due funzioni misurabili, allora le funzioni* $(f + g)$ *e* $(f \cdot g)$ *sono misurabili.*

Osservazione. *Si intende che $f(x) + g(x)$ è una "forma indeterminata" se $f(x) = +\infty$ e $g(x) = -\infty$, oppure $f(x) = -\infty$ e $g(x) = +\infty$. Analogamente $f(x) \cdot g(x)$ può essere una forma indeterminata del tipo $0 \cdot \infty$.*

Dimostrazione. Sia $A \subseteq \mathbb{X}$ l'insieme in cui $f(x) + g(x)$ è una forma indeterminata. Esso è un insieme misurabile, dal momento che si ha:

$$A = \Big(\{f = +\infty\} \cap \{g = -\infty\}\Big) \cup \Big(\{f = -\infty\} \cap \{g = +\infty\}\Big)$$

Fissato $\alpha \in \mathbb{R}$, definiamo

$$E = \{x \in \mathbb{X} \,:\, f(x) + g(x) > \alpha\}$$

Allora

$$\begin{aligned} E \setminus A &= \{x \in (\mathbb{X} \setminus A) \,:\, f(x) + g(x) > \alpha\} = \\ &= \{x \in (\mathbb{X} \setminus A) \,:\, f(x) > \alpha - g(x)\} \end{aligned}$$

e, per il lemma 4.8, questo insieme è misurabile dal momento che:

$$\forall \gamma \in \mathbb{R} \qquad \{\alpha - g > \gamma\} = \{g < \alpha - \gamma\}$$

e dunque la funzione $(\alpha - g)$ è misurabile.
Consideriamo ora la funzione $(f + g)|_A$, che, per la definizione di somma tra funzioni misurabili, assume solo il valore c. Dunque si ha

$$E \cap A = \{x \in A : \, f(x) + g(x) > \alpha\} = \{x \in A \,:\, c > \alpha\}$$

e dunque anche questo insieme è misurabile, perché o è vuoto, oppure è tutto A.
Concludendo $E = (E \cap A) \cup (E \setminus A)$ e pertanto, essendo E unione di misurabili è anch'esso misurabile $\forall \alpha \in \mathbb{R}$. Dunque $(f + g)$ è misurabile.

Nel caso del prodotto invece si ha che

$$\forall x \in \mathbb{X}, \;\; (f+g)^2(x) = f^2(x) + 2f(x) \cdot g(x) + g^2(x)$$

$$\forall x \in \mathbb{X}, \;\; (f-g)^2(x) = f^2(x) - 2f(x) \cdot g(x) + g^2(x)$$

e dunque si puó esprimere il prodotto come

$$(f \cdot g)(x) = \frac{1}{4}\Big((f+g)^2(x) - (f-g)^2(x)\Big)$$

e quindi per il lemma precedente e per la prima parte del teorema $(f \cdot g)$ è misurabile dal momento che, se h è misurabile, allora anche $a \cdot h$ è misurabile $\forall a \in \mathbb{R}$. □

Teorema 4.11. *Sia $\{f_n\}$ una successione di funzioni misurabili, allora $\sup_n f_n$, $\inf_n f_n$, $\limsup_n f_n$ e $\liminf_n f_n$ sono funzioni misurabili.*

Dimostrazione. Si ha che

$$\left\{x \in \mathbb{X} \,:\, \sup_n f_n \leq \alpha\right\} = \{x \in \mathbb{X} \,:\, \forall n \in \mathbb{N},\, f_n \leq \alpha\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x \in \mathbb{X} \,:\, f_n \leq \alpha\}$$

e dunque $\sup_n f_n$ è misurabile. La misurabilità di $\inf_n f_n$ si puó dimostrare in modo analogo. Essendo poi $\limsup_n f_n = \inf_n \sup_{k>n} f_k$ si ha che anche questa funzione è misurabile. La dimostrazione è analoga nel caso del $\liminf_n f_n$. □

4.2 Proprietà vere 'quasi ovunque' e convergenze

Definizione 4.7. *Sia $(\mathbb{X}, \mathscr{A}, \mu)$ uno spazio con misura. Una proprietà $P(x)$ dei punti di $\mathbb{X}$ si dice vera "quasi ovunque" se $\exists E \in \mathscr{A}$ tale che $\mu(E) = 0$ e $P(x)$ è vera $\forall x \in \mathbb{X} \setminus E$.*

Definizione 4.8. *Si dice che una successione $\{f_n\}$ di funzioni converge quasi ovunque ad una funzione f se e solo se $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x)$ per quasi ogni $x \in \mathbb{X}$.*

Proposizione 4.12. *Sia $(\mathbb{X}, \mathscr{A}, \mu)$ uno spazio con misura completo. Sia f una funzione misurabile e sia g una funzione tale che $g = f$ quasi ovunque. Allora g è misurabile.*

Dimostrazione. Sia $E \in \mathscr{A}$ tale che $\mu(E) = 0$ e $g(x) = f(x)\ \ \forall x \in \mathbb{X} \setminus E$. Allora

$$\begin{aligned} \{g > \alpha\} &= \{x \in \mathbb{X} \setminus E : f(x) > \alpha\} \cup \{x \in E : g(x) > \alpha\} = \\ &= H \cup F \end{aligned}$$

Si ha che $H \in \mathscr{A}$ perché esso è $\{f > \alpha\} \setminus E$, ed inoltre $F \subseteq E$, e dunque per la completezza dello spazio di misura si ha che F è misurabile e pertanto lo è anche g. □

Teorema 4.13. *Sia $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ una successione di funzioni misurabili. Se $f_n \to g$ ovunque, allora g è misurabile. Inoltre, se $(\mathbb{X}, \mathscr{A}, \mu)$ è completo e $f_n \to g$ quasi ovunque, allora g è misurabile.*

Dimostrazione. La prima parte della proposizione segue dal teorema 4.11 su lim inf e lim sup. Siano dunque

$$\overline{f} \stackrel{\text{def}}{=} \limsup_{n\to\infty} f_n \qquad \text{e} \qquad \underline{f} \stackrel{\text{def}}{=} \liminf_{n\to\infty} f_n$$

Sia $E \in \mathscr{A}$ tale che $\mu(E) = 0$ e $\forall x \in \mathbb{X} \setminus E,\ \ f_n(x) \to g(x)$. Allora

$$\forall x \in \mathbb{X} \setminus E, \qquad \overline{f}(x) = \underline{f}(x) = g(x)$$

e dunque $g = \bar{f}$ quasi ovunque e per la proposizione 4.12, g è misurabile. □

Definizione 4.9. *Una funzione $f : \mathbb{R} \longrightarrow [-\infty, +\infty]$ si dice "di Borel" se $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ si ha che $\{x \in \mathbb{R} : g(x) > \alpha\} \in \mathscr{B}$.*

Esercizio 4.5. *Sia $g : \mathbb{R} \longrightarrow [-\infty, +\infty]$ di Borel, sia $(\mathbb{X}, \mathscr{A}, \mu)$ uno spazio con misura e sia $f : \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{R}$ misurabile. Si dimostri che $g \circ f$ è misurabile.*

Esercizio 4.6. *Sia $g : \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}$ continua e siano $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$ funzioni misurabili da $\mathbb{X}$ in $\mathbb{R}$ con $(\mathbb{X}, \mathscr{A}, \mu)$ spazio con misura. Si dimostri che $f = g(\varphi_1, \ldots, \varphi_k)$ è misurabile.*

Esercizio 4.7. *Sia f una funzione misurabile, sia $c \in \mathbb{R}$ e si ponga*

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{f(x)} & \textit{dove } f(x) \neq 0 \\ c & \textit{dove } f(x) = 0 \end{cases}$$

Si dimostri che $g(x)$ è misurabile.

Definizione 4.10. *Si dice "funzione semplice" una funzione misurabile $f\colon \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{R}$ la cui immagine $f(\mathbb{X})$ è un insieme finito di valori reali.*

Definizione 4.11. *Sia f una funzione semplice, siano $a_1, a_2, \dots, a_N \in \mathbb{R}$ i suoi valori distinti. Sia $E_i \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{X} : f(x) = a_i\}$. Dunque $f = \sum_{i=1}^{N} a_i \cdot \chi_{E_i}$, che si definisce "rappresentazione canonica della funzione semplice".*

Osservazione. *Siano $t_1, \dots, t_k \in \mathbb{R}$ numeri reali e $A_1, \dots, A_k \in \mathscr{A}$ insiemi misurabili, allora la funzione $f(x) = \sum_{i=1}^{k} t_k \chi_{A_k}$ è una funzione semplice. Questa è la sua rappresentazione canonica se gli A_i sono disgiunti e i t_i distinti (con la condizione che se $A_0 = \mathbb{X} \setminus A_i$ è non vuoto, si accetta l'addendo $0\chi_{A_0}$ che dà un contributo nullo).*

Teorema 4.14. *Sia f una funzione misurabile non negativa. Allora esiste una successione crescente di funzioni semplici $\{f_n\}$ tali che $\forall x \in \mathbb{X}$ si abbia che $\lim_n f_n(x) = f(x)$.*

Dimostrazione. Fissato $n \in \mathbb{N}$, si divide $[0, n]$ in intervalli di ampiezza 2^{-n}; se f assume valori maggiori di n, la si tronca ad n. Si ponga:

$$f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{i-1}{2^n} & \text{se } \dfrac{i-1}{2^n} \le f(x) < \dfrac{i}{2^n} \quad \text{per qualche } \in \{1, \dots, n \cdot 2^n\} \\ \\ n & \text{se } f(x) \ge n \end{cases}$$

Se $f(x) = +\infty$, allora $f_n(x) = n \ \ \forall n$ e duque si ha la convergenza.
Se $f(x) < +\infty$, allora per costruzione $f_n(x) - f(x) \le 0$ e definitivamente $|f_n(x) - f(x)| \le 2^{-n}$, e da questo segue la convergenza. Inoltre sempre per costruzione $f_n \le f_{n+1}$, quindi si ha la monotonia.
Tutte queste funzioni f_n sono semplici, perché assumono un numero finito di valori e i loro insiemi di livello sono ottenuti da intersezioni di insiemi di livello di f, dunque sono misurabili. □

Corollario 4.15. *Sia f misurabile, allora esiste una successione di funzioni semplici $\{f_n\}$ tale che $\{|f_n|\}$ è crescente e $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x) \ \ \forall x \in \mathbb{X}$.*

Dimostrazione. Per esercizio.
Suggerimento: si applica il teorema separatamente a f^+ e f^-. □

Corollario 4.16. *Sia f misurabile e limitata, allora la successione f_n definita nella dimostrazione del teorema 4.14 converge uniformemente a f.*

Definizione 4.12. *Data una funzione f e una successione di funzioni $\{f_n\}$ su uno spazio con misura $(\mathbb{X}, \mathcal{A}, \mu)$, si dice che f_n converge ad f "quasi uniformemente" se $\forall \varepsilon > 0$, $\exists\, E \in \mathscr{A}$ tale che $\mu(E) < \varepsilon$ e f_n tende a f uniformemente su $\mathbb{X} \setminus E$.*

Teorema 4.17. (Teorema di Egorov-Severini)
Sia $(\mathbb{X}, \mathscr{A}, \mu)$ uno spazio con misura finito e sia $\{f_n\}$ una successione di funzioni misurabili che convergono quasi ovunque a una funzione f misurabile quasi ovunque finita. Allora la successione $\{f_n\}$ tende a f quasi uniformemente.

Lemma 4.18. *Sia* $(\mathbb{X}, \mathscr{A}, \mu)$ *uno spazio con misura finito e sia* $\{f_n\}$ *una successione di funzioni misurabili che convergono quasi ovunque a una funzione* f *misurabile quasi ovunque finita. Allora* $\forall \varepsilon > 0, \forall \delta > 0$, $\exists A \in \mathscr{A}$ *tale che* $\mu(A) < \delta$ *ed* $\exists N$ *intero tale che* $\forall n \geq N$, $|f_n - f| \leq \varepsilon$ *in* $\mathbb{X} \setminus A$.

Dimostrazione. Sia $G_n \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{X} : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}$ e sia $E_n = \bigcup_{i=n}^{\infty} G_i$. Si ha dunque che $\forall n \in \mathbb{N}$, $E_{n+1} \subseteq E_n$, dunque la successione è descrescente.
Sia $x \in \mathbb{X}$ tale che $|f(x)| < +\infty$ e $\lim_{n \to +\infty} f_n(x) = f(x)$. Allora $\exists N \in \mathbb{N}$ tale che $\forall n \geq N$, $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ ovvero $\forall n \geq N$, $x \notin E_n$. Dunque, per le ipotesi di convergenza quasi ovunque ad una funzione quasi ovunque finita, si ha che $\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n\right) = 0$ perché $\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n$ è contenuto nell'insieme di misura nulla in cui non vale la convergenza. Essendo $\mu(\mathbb{X}) \lneqq +\infty$, per il teorema sulle successioni decrescenti si ottiene che

$$\lim_{n \to \infty} \mu(E_n) = \mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n\right) = 0$$

Dunque, in dipendenza di $\delta > 0$, $\exists\, N \in \mathbb{N}$ tale che $\mu(E_N) < \delta$. Sia dunque $A = E_N$, allora

$$A = \{x \in \mathbb{X} : \exists\, k \geq N \text{ tale che } |f_k(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}$$

Pertanto si ha che in $\mathbb{X} \setminus A$, $\forall n \geq N$, $|f_n - f| < \varepsilon$. $\square$

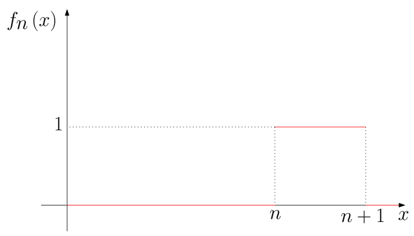
Dimostrazione del Teorema di Egorov-Severini. Siano fissati $\eta > 0$ e $m \in \mathbb{N}$ poniamo $\varepsilon = \frac{1}{m}$ e $\delta = \eta \cdot 2^{-m}$. Per il lemma 4.18 si ha che esiste $A(\eta, m)$ tale che $\mu\Big(A(\eta, m)\Big) \leq \eta \cdot 2^{-m}$ ed esiste $N \in \mathbb{N}$, dipendente da η ed m, tale che $\forall k \geq N$, $|f_k - f| \leq \frac{1}{m}$ su $\mathbb{X} \setminus A(\eta, m)$. Sia dunque $E(\eta) \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{m=1}^{\infty} A(\eta, m)$ ed in questo modo:

$$\mu(E) \leq \sum_{m=1}^{\infty} \mu\Big(A(\eta, m)\Big) \leq \eta$$

Su $\mathbb{X} \setminus E$ si ha che $\forall m \in \mathbb{N}$, $\exists N(\eta, m) \in \mathbb{N}$ tale che $\forall k \geq N$, $|f_k - f| \leq \frac{1}{m}$. Per $k \to \infty$ quindi $\sup_{x \in \mathbb{X} \setminus E} |f_k - f|$ tende a zero, e questo dimostra che, su $\mathbb{X} \setminus E$, $\{f_n\}$ converge a f uniformemente. $\square$

Tra le varie ipotesi del teorema di Egorov-Severini, è importante notare quella di finitezza della misura. Infatti, senza questa ipotesi, è facile verificare che il teorema non è più vero. Considerariamo il seguente controesempio:
Sia $\mathbb{X} = \mathbb{R}$ e sia $\{f_n\}$ una successione di funzioni così definita

$$f_n(x) = \chi_{[n,n+1]}(x)$$



In particolare $\forall x \in \mathbb{R}$, la successione $\{f_n(x)\}$ è definitivamente nulla, e pertanto la successione di funzioni $\{f_n\}$ tende puntualmente alla funzione nulla (che è una funzione misurabile ovunque finita).

Tuttavia si ha che

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mu\Big(\{|f_n(x) - 0| = 1\} \Big) = \mu([n, n+1]) = 1$$

Pertanto la successione non converge quasi uniformemente.

Definizione 4.13. (Convergenza in misura)
Sia $\{f_n\}$ una successione di funzioni misurabili e sia f una funzione misurabile. Si dice che la successione $\{f_n\}$ converge a f "in misura" se e solo se

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \lim_{n\to\infty} \mu\Big(\{x \in \mathbb{X} : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\} \Big) = 0$$

Lemma 4.19. *Siano f e g due funzioni misurabili e sia $\{f_n\}$ una successione di funzioni misurabili che converge in misura sia a f che a g. Allora $f(x) = g(x)$ quasi ovunque.*

Dimostrazione.

$$|f - g| \leq |f_n - f| + |f_n - g|$$

$$\{|f - g| \geq 2\varepsilon\} \subseteq \{|f_n - f| \geq \varepsilon\} \cup \{|f_n - g| \geq \varepsilon\}$$

Pertanto $\forall \varepsilon > 0$, $\{|f - g| \geq 2\varepsilon\}$ ha misura nulla, ed in questo modo:

$$\{f \neq g\} = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \left\{ |f - g| \geq \frac{2}{k} \right\} \quad \Rightarrow \quad \mu\{f \neq g\} = 0$$

□

Teorema 4.20. *Sia $\{f_n\}$ una successione di funzioni misurabili e sia f una funzione misurabile. Se $\{f_n\}$ converge quasi uniformemente ad f, allora converge ad f anche in misura.*

Dimostrazione. Si ha per ipotesi che $\forall \delta > 0$, $\exists E \in \mathscr{A}$ tale che $\mu(E) \leq \delta$ e $f_n \to f$ uniformemente su $\mathbb{X} \setminus E$. Dunque

$$\forall \varepsilon > 0, \exists\, \bar{n} \in \mathbb{N} : \quad \forall n \geq \bar{n}, \ |f_n - f| < \varepsilon \ \text{ su } \ \mathbb{X} \setminus E$$

Allora si ha che

$$\{|f_n - f| \geq \varepsilon\} \subseteq E, \quad \forall n \geq \bar{n}$$

Quindi

$$\mu\Big(\{x \in \mathbb{X} : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\} \Big) \leq \mu(E) \leq \delta, \quad \forall n \geq \bar{n}$$

Ovvero

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \lim_{n\to\infty} \mu\Big(\{x \in \mathbb{X} : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\} \Big) = 0.$$

□

Corollario 4.21. *Sia $(\mathbb{X}, \mathscr{A}, \mu)$ uno spazio con misura, sia f una funzione misurabile quasi ovunque finita e sia $\{f_n\}$ una successione che converge quasi ovunque a f. Se $\mu(\mathbb{X}) < \infty$ allora $\{f_n\}$ tende a f in misura.*

Esibiamo ora un controesempio per mostrare che, in generale, la convergenza in misura non implica la convergenza puntuale. Per questo ricorreremo ad una variante del controesempio utilizzato precedentemente. Sia dunque $\mathbb{X} = [0,1]$ e sia $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ una successione così definita:

$$f_n(x) = \chi_{[r \cdot 2^{-k}, (r+1) \cdot 2^{-k}]}(x)$$

dove $k, r \in \mathbb{N}$ sono numeri naturali scelti con il seguente criterio: preso n sia k tale che $2^k \leq n \leq 2^k$ e sia r tale che $n = 2^k + r$ e $0 \leq r < 2^k$. Si noti che $k \to \infty$ per $n \to \infty$. Le funzioni f_n così definite sono dunque nulle su tutto $[0,1]$ eccettuato un intervallo di ampiezza 2^{-k} che si sposta lungo tutto l'intervallo per 2^k passi. Questa successione di funzioni converge dunque in misura alla funzione nulla, ma, poiché ogni punto assume infinite volte sia il valore 0 che il valore 1, la successione non ammette limite puntuale.

Definizione 4.14. *Una successione di funzioni misurabili $\{f_n\}$ si dice "di Cauchy in misura" se e solo se*

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \lim_{n,m \to \infty} \mu\Big(\{x \in \mathbb{X} \, : \, |f_n(x) - f_m(x)| \geq \varepsilon\} \Big) = 0$$

Lemma 4.22. *Le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

$$\textit{i.}\ \forall \varepsilon > 0, \ \ \forall \delta > 0, \ \ \exists \bar{n} \in \mathbb{N} : \quad \forall n, m \geq \bar{n}, \\ \mu\Big(\{x \in \mathbb{X} \, : \, |f_n(x) - f_m(x)| \geq \varepsilon\} \Big) \leq \delta$$

$$\textit{ii.}\ \forall \eta > 0, \ \ \exists \bar{n} \in \mathbb{N} : \quad \forall n, m \geq \bar{n}, \\ \mu\Big(\{x \in \mathbb{X} \, : \, |f_n(x) - f_m(x)| \geq \eta\} \Big) \leq \eta$$

Dimostrazione. Per esercizio. □

Teorema 4.23. *Sia $\{f_n\}$ una successione di funzioni misurabili quasi ovunque finite che sia di Cauchy in misura. Allora esiste una funzione misurabile f e una sottosuccessione $\{f_{n_k}\}$ che converge quasi uniformemente a f.*

Dimostrazione. Per ipotesi si ha che $\forall k \in \mathbb{N}, \exists \bar{n}(k) \in \mathbb{N}$ tale che si abbia $\forall n, m \geq \bar{n}(k)$, $\mu\left(\left\{x \in \mathbb{X} : |f_n(x) - f_m(x)| \geq 2^{-k}\right\}\right) \leq 2^{-k}$. Essendo inoltre $\mu\left(\left\{x \in \mathbb{X} : |f_n(x) - f_m(x)| \geq 2^{-k}\right\}\right) \leq \mu\left(\left\{x \in \mathbb{X} : |f_n(x) - f_m(x)| \geq 2^{-k-1}\right\}\right)$ si può considerare la successione $\{n_k\} = \bar{n}(k)$ strettamente crescente.

Sia inoltre $E_k \overset{\text{def}}{=} \left\{x \in \mathbb{X} : \left|f_{n_k}(x) - f_{n_{k+1}}(x)\right| \geq 2^{-k}\right\}$ e $F_m \overset{\text{def}}{=} \bigcup_{k=m}^{\infty} E_k$. Consideriamo dunque un generico $x \in \mathbb{X} \setminus F_m$ e siano $j, k \in \mathbb{N} : j \geq k \geq m$. Per la disuguaglianza triangolare si ha che

$$\left|f_{n_k}(x) - f_{n_j}(x)\right| \leq \sum_{l=k}^{j-1} \left|f_{n_l}(x) - f_{n_{l+1}}(x)\right| \leq \sum_{l=k}^{j-1} 2^{-l} = 2^{-k+1} \cdot \left(1 - 2^{k-j-1}\right)$$

da cui si ottiene che

$$\lim_{k,j \to \infty} \sup_{x \in \mathbb{X} \setminus F_m} \left|f_{n_k}(x) - f_{n_j}(x)\right| = 0$$

ovvero che, per ogni m, su $\mathbb{X} \setminus F_m$, la successione $\{f_{n_k}\}$ è di Cauchy uniformemente e pertanto ammette limite uniforme. Sia dunque f il limite puntuale di $\{f_{n_k}\}$ e sia $F \stackrel{\text{def}}{=} \bigcap_{m=1}^{\infty} F_m$.
Essendo $\{F_m\}_{m=1}^{\infty}$ una successione decrescente di insiemi ed essendo inoltre $\mu(F_1) = \mu(E_1) \neq \infty$, è possibile applicare il teorema 1.15 da cui si ottiene che $\mu(F) = \lim_{m\to\infty} \mu(F_m)$. Inoltre, si ha che

$$\lim_{m\to\infty} \mu(F_m) = \lim_{m\to\infty} \mu\left(\bigcup_{i=m}^{+\infty} E_i\right) \leq \lim_{m\to\infty} \sum_{i=m}^{+\infty} \mu(E_i) \leq \lim_{m\to\infty} 2^{(1-m)} = 0$$

e dunque $\mu(F) = 0$.
Definiamo la funzione $\bar{f}$ nel seguente modo

$$\bar{f}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 0 & \text{se } x \in F \\ f(x) & \text{se } x \in \mathbb{X} \setminus F \end{cases}$$

Pertanto la sottosuccessione $\{f_{n_k}\}$ converge quasi uniformemente a $\bar{f}$, che è misurabile. □

Lemma 4.24. *Siano f, g e h delle funzioni misurabili, sia ε un numero reale strettamente positivo e siano A, B e C tre insiemi così definiti:*

$$A \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{X} : |f(x) - g(x)| \geq \varepsilon\}$$

$$B \stackrel{\text{def}}{=} \left\{x \in \mathbb{X} : |f(x) - h(x)| \geq \tfrac{\varepsilon}{2}\right\}$$

$$C \stackrel{\text{def}}{=} \left\{x \in \mathbb{X} : |h(x) - g(x)| \geq \tfrac{\varepsilon}{2}\right\}$$

Allora si ha che $\mu(A) \leq \mu(B) + \mu(C)$.

Dimostrazione. Si dimostrerà che $A \subseteq B \cup C$. $\forall x \in \mathbb{X} : |f(x) - g(x)| \geq \varepsilon$, essendo $|f(x) - g(x)| \leq |f(x) - h(x)| + |h(x) - g(x)|$ per la disuguaglianza triangolare, si ha che $|f(x) - h(x)| + |h(x) - g(x)| \geq \varepsilon$. Dunque uno dei due numeri $|f(x) - h(x)|$, $|h(x) - g(x)|$ è maggiore di $\frac{\varepsilon}{2}$ e pertanto $A \subseteq B \cup C$. □

Teorema 4.25. *Sia $\{f_n\}$ una successione di funzioni misurabili che convergono in misura a f. Allora $\{f_n\}$ è di Cauchy in misura.*

Dimostrazione. La dimostrazione è immediata utilizzando il lemma precedentemente dimostrato, per il quale l'insieme $\{x \in \mathbb{X} : |f_n(x) - f_m(x)| \geq \varepsilon\}$ è un sottoinsieme di $\left\{x \in \mathbb{X} : |f_n(x) - f(x)| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\} \cup \left\{x \in \mathbb{X} : |f(x) - f_m(x)| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\}$ la cui misura tende a 0 per n ed m tendenti all'infinito. □

Teorema 4.26. *Sia $\{f_n\}$ una successione di funzioni misurabili quasi ovunque finite di Cauchy in misura. Allora esiste f funzione misurabile quasi ovunque finita tale che $\{f_n\}$ converge a f in misura.*

Dimostrazione. Per il teorema 4.23 esiste una sottosuccessione $\{f_{n_k}\}$ che converge a f quasi uniformemente, e per il teorema 4.20 si ha che $\{f_n\}$ converge a f anche in misura. Sia $n \in \mathbb{N}$, consideriamo l'insieme $\{x \in \mathbb{X} : |f(x) - f_n(x)| \geq \varepsilon\}$

contenuto in $\left\{x \in \mathbb{X} : |f(x) - f_{n_k}(x)| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\} \cup \left\{x \in \mathbb{X} : |f_{n_k}(x) - f_n(x)| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\}$ per il lemma 4.24. Essendo

$$\lim_{n\to\infty} \mu\left(\left\{x \in \mathbb{X} : |f(x) - f_{n_k}(x)| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\} \cup \left\{x \in \mathbb{X} : |f_{n_k}(x) - f_n(x)| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\}\right) = 0$$

si ha che $\lim_{n\to\infty} \mu\left(\{x \in \mathbb{X} : |f(x) - f_n(x)| \geq \varepsilon\}\right) = 0$, da cui la tesi. □

Definizione 4.15. *Una funzione $h : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ si dice "a scalino" se è una funzione semplice che viene canonicamente rappresentata come $h = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{U_i}$, dove $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$, U_i è un'unione finita di intervalli.*

Teorema 4.27. *Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un insieme misurabile tale che $\mu(A) < +\infty$. Sia f una funzione misurabile su A quasi ovunque finita. Allora $\forall \varepsilon > 0$ esiste $h : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ tale che h è a scalino e $\mu\{x \in \mathbb{X} : |f(x) - h(x)| \geq \varepsilon\} \leq \varepsilon$ ed esiste $g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ continua, limitata e nulla fuori da un compatto tale che $\mu\{x \in \mathbb{X} : |f(x) - g(x)| \geq \varepsilon\} \leq \varepsilon$.*

Dimostrazione. Essendo, per ipotesi, f una funzione quasi ovunque finita si ha che, dal momento che $\mu(A) < +\infty$

$$\lim_{M\to+\infty} \mu\Big(\{x \in A \,:\, |f(x)| \geq M\}\Big) = \mu\left(\bigcap_{M=1}^{\infty} \{|f| \geq M\}\right) = \mu\Big(\{f = \pm\infty\}\Big) = 0$$

In altre parole,

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists\, M(\varepsilon) \ \text{ tale che } \ \mu\Big(\{x \in A : |f(x)| \geq M(\varepsilon)\}\Big) \leq \varepsilon$$

Sia dunque $f_M \stackrel{\text{def}}{=} f \cdot \chi_{\{x \in A : |f(x)| \leq M\}}$. Essendo f_M una funzione limitata, per il corollario 4.16, si ha che esiste una successione di funzioni semplici $\{\varphi_n\}$ che converge a f_M uniformemente. Sia $\varphi = \varphi_n$ con n opportuno tale che $\forall x \in A,\ |\varphi(x) - f_M(x)| < \varepsilon$.
Siano inoltre, per semplicità di notazione,

$$\{|f - \varphi| \geq \varepsilon\} \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in A : |f(x) - \varphi(x)| \geq \varepsilon\}$$

$$\{f \neq f_M\} \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in A : f(x) \neq f_M(x)\}$$

$$\{|f_M - \varphi| \geq \varepsilon\} \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in A : |f_M(x) - \varphi(x)| \geq \varepsilon\} = \emptyset$$

Si ha dunque

$$\mu\Big(\{|f - \varphi| \geq \varepsilon\}\Big) \leq \mu\Big(\{f \neq f_M\}\Big) + \mu\Big(\{|f_M - \varphi| \geq \varepsilon\}\Big) \leq \varepsilon + 0 = \varepsilon$$

Essendo φ una funzione semplice, si può rappresentare canonicamente come $\varphi = \sum_{i=1}^{m} a_i \chi_{E_i}$, con tutti gli a_i reali minori di M e E_i insiemi a due a due disgiunti contenuti in A, e dunque con $\mu(E_i) < +\infty$. Si ha che $\forall i \in \{0, \ldots, m\}$

esiste un unione finita U_i di intervalli tale che $\mu\left(E_i \triangle U_i\right) < \dfrac{\varepsilon}{m}$. Sia dunque $h \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{m} a_i \chi_{U_i}$. Mantenendo la notazione secondo la quale $\{h \neq \varphi\} \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in A : h(x) \neq \varphi(x)\}$, si ha che $\{h \neq \varphi\} \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} \left(E_i \triangle U_i\right)$ e pertanto in misura

$$\mu\Big(\{h \neq \varphi\}\Big) \leq \mu\left(\bigcup_{i=1}^{m} \left(E_i \triangle U_i\right)\right) \leq \sum_{i=1}^{m} \frac{\varepsilon}{m} = \varepsilon$$

Dunque, si ha che

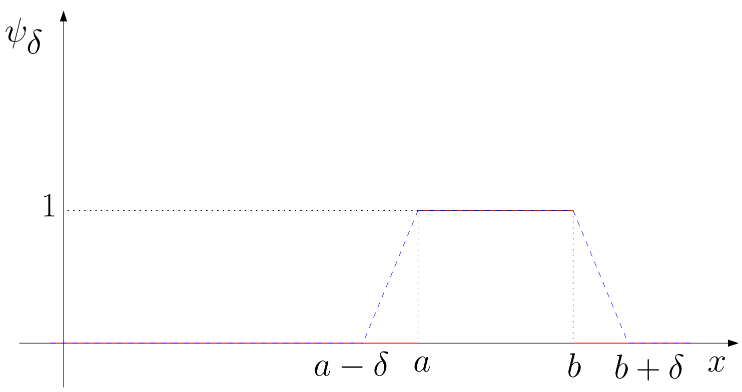
$$\mu\left(\{|f-h| \geq \varepsilon\}\right) \leq \mu\left(\{|f-\varphi| \geq \varepsilon\}\right) + \mu\left(\{h \neq \varphi\}\right) \leq 2\varepsilon$$

e dunque la prima parte della tesi è dimostrata a meno di sostituire ε con $\frac{\varepsilon}{2}$.

Utilizziamo ora l'esistenza della funzione h per ricavare da questa una funzione continua che soddisfi tutte le proprietà richieste dal teorema.

Restringiamoci momentanemanete al caso unidimensionale; è possibile approssimare una funzione caratteristica $\chi_{[a,b]}$ di un intervallo $[a, b]$ con una funzione continua $\psi_\delta\left(x; a, b\right)$ in modo che quest'ultima differisca da $\chi_{[a,b]}$ al più per un insieme di misura 2δ mediante la seguente definizione:

$$\psi_\delta\left(x; a, b\right) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 0 & \text{se } x < a - \delta \\ \dfrac{x-a+\delta}{\delta} & \text{se } a - \delta \leq x < a \\ 1 & \text{se } a \leq x < b \\ \dfrac{b+\delta-x}{\delta} & \text{se } b \leq x < b + \delta \\ 0 & \text{se } x \geq b + \delta \end{cases}$$



È facile verificare che, come precedentemente affermato,

$$\mu\Big(\left\{x \in A : \psi_\delta\left(x; a, b\right) \neq \chi_{[a,b]}\left(x\right)\right\}\Big) = 2 \cdot \delta$$

Ritornando al caso n-dimensionale, consideriamo dunque il plurintervallo $I = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \ldots \times [a_n, b_n]$. Si ha che la sua funzione caratteristica χ_I si può scrivere come

$$\chi_I = \chi_{[a_1,b_1]}(x_1) \cdot \chi_{[a_2,b_2]}(x_2) \cdot \ldots \cdot \chi_{[a_n,b_n]}(x_n)$$

dove con x_i si intende la componente i-esima del vettore x.
Sia g_δ la funzione:

$$g_\delta(x) \stackrel{\text{def}}{=} \psi_\delta(x_1; a_1, b_1) \cdot \psi_\delta(x_2; a_2, b_2) \cdot \ldots \cdot \psi_\delta(x_n; a_n, b_n)$$

Si osserva che

$$\lim_{\delta \to 0} \mu\Big(\{x \in \mathbb{R}^n : g_\delta(x) \neq \chi_I\} \Big) = 0$$

Considerata ora una funzione f come in ipotesi del teorema, abbiamo già dimostrato che $\exists\, h = \sum_{j=1}^{m} a_j \cdot \chi_{I_j}$ tale che $\forall \varepsilon > 0,\ \mu\Big(\{|f - h| \geq \varepsilon\} \Big) \leq \varepsilon$. Si ha inoltre che, $\forall j \in \{1, \ldots, m\}$, esiste g_j continua, nulla fuori da un compatto, tale che $\mu\Big(\{g_j \neq \chi_{I_j}\} \Big) \leq \frac{\varepsilon}{m}$. Definiamo $g(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j=1}^{m} a_j \cdot g_j(x)$. Questa funzione è continua, limitata, nulla fuori da un compatto, ed inoltre

$$\begin{aligned} \mu\Big(\{|f - g| > \varepsilon\} \Big) &\leq \mu\Big(\{|f - h| > \varepsilon\} \Big) + \mu\Big(\{h \neq g\} \Big) \leq \\ &\leq \varepsilon + \sum_{j=1}^{m} \mu\Big(\{\chi_{I_j} \neq g_j\} \Big) = 2\varepsilon \end{aligned}$$

e pertanto il teorema è dimostrato. □

Corollario 4.28. *Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un insieme misurabile tale che $\mu(A) \lneq +\infty$. Sia f una funzione misurabile su A quasi ovunque finita. Allora esistono successioni $\{h_n\}$ e $\{g_n\}$ di funzioni rispettivamente a scalino e continue tali che $h_n \to f$ e $g_n \to f$ in misura e dunque quasi uniformemente.*

Dunque una funzione misurabile è "pressappoco" una funzione continua. Il precedente teorema e il corollario ci danno un'interpretazione rigorosa di questo "pressappoco". Un'altra possibile interpretazione è quella che segue.

Definizione 4.16. *Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$, una funzione $f : A \longrightarrow [-\infty, +\infty]$ si dice "quasi continua" se $\forall \varepsilon > 0$, esiste $E \subset A$ misurabile tale che $\mu(E) < \varepsilon$ ed esiste una funzione continua $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tale che $f = g$ su $A \setminus E$.*

Teorema 4.29. (Teorema di Lusin in forma debole)
Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un insieme misurabile di misura finita e sia una funzione $f : A \longrightarrow [-\infty, +\infty]$ misurabile quasi ovunque finita. Allora si ha che $\forall \varepsilon > 0,\ \exists\, E \subseteq A$ tale che $\mu(E) \leq \varepsilon$ ed f è continua su $A \setminus E$.

Dimostrazione. Per il teorema 4.27 esiste una successione $\{g_n\}$ di funzioni continue che converge quasi uniformemente a f, ovvero $\exists\, E \subseteq A$ misurabile tale che $\mu(E) < \varepsilon$ e $\{g_n\}$ converge uniformemente a f su $A \setminus E$. Poiché lo spazio delle funzioni continue è metricamente completo, f è continua su $A \setminus E$, essendo limite uniforme di funzioni continue. □

Vediamo come si possa rafforzare il risultato ottenuto facendo ricorso a questo risultato topologico.

Teorema 4.30. (Teorema di estensione di Tietze)
Sia $\mathbb{X}$ uno spazio metrico, sia Y un sottoinsieme chiuso di $\mathbb{X}$ e sia $f : Y \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua e limitata. Allora esiste una funzione $g : \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{R}$ continua tale che $g_{|Y} = f$.

Teorema 4.31. (Teorema di Lusin)
Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$ insieme misurabile con $\mu(A) \lneq \infty$ e sia inoltre $f : A \mapsto [-\infty, +\infty]$ una funzione misurabile quasi ovunque finita. Allora f è quasi continua.

Dimostrazione. Dato che f è q.o. finita sappiamo intanto che $\forall \varepsilon > 0$ esiste $F_1 \subset A$ misurabile tale che $\mu(F_1) < \varepsilon$ ed esiste $M > 0$ tale che $|f| \leq M$ su $A \setminus F_1$. Per la prima versione del teorema di Lusin, esiste $F_2 \subset A$ misurabile tale che $\mu(F_2) < \varepsilon$ ed f è continua e limitata su $A \setminus (F_1 \cup F_2)$. Esiste F_3 tale che $\mu(F_3) < \varepsilon$ e $G = A \setminus (F_1 \cup F_2 \cup F_3)$ è chiuso. Quindi $f_{|G}$ è continua e limitata. Per il teorema di Tietze esiste g continua e limitata su $\mathbb{R}^n$ tale che $g_{|G} = f$. Infine l'insieme dove $g \neq f$ è contenuto in $F = F_1 \cup F_2 \cup F_3$ e $\mu(F) < 3\varepsilon$. La tesi segue sostituendo ε con $\frac{\varepsilon}{3}$.

□

Capitolo 5

Teoria dell'integrazione

5.1 Funzioni integrabili

Nei seguenti enunciati si considerano funzioni su un dato spazio con misura $(\mathbb{X}, \mathscr{A}, \mu)$.

Definizione 5.1. *Sia* $\varphi = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{E_i}$ *una funzione semplice nonnegativa in rappresentazione canonica. Definiamo*

$$\int \varphi \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \mu(E_i)$$

Lemma 5.1. *Sia* $\varphi = \sum_{i=1}^{k} a_i \chi_{E_i}$ *nonnegativa con* E_i *a due a due disgiunti (gli* a_i *non sono invece necessariamente distinti). Allora*

$$\int \varphi = \sum_{i=1}^{k} a_i \cdot \mu(E_i)$$

Dimostrazione. Per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$, sia $E_\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{a_i = \alpha} E_i$. Allora si ottiene che $\varphi = \sum_{\alpha} \alpha \chi_{E_\alpha}$ e, in particolare, questa rappresentazione è quella canonica, essendo $E_\alpha \neq \emptyset$ solo per un numero finito di α. Dunque vale che

$$\int \varphi = \sum_{\alpha \in \mathbb{R}} \alpha \mu(E_\alpha)$$

Se esiste i tale che $a_i = \alpha$, $E_\alpha = \bigcup_{a_i = \alpha} E_i$ si ha che

$$\mu(E_\alpha) = \sum_{a_i = \alpha} \mu(E_i)$$

e dunque

$$\alpha\mu\left(E_{\alpha}\right)=\sum_{a_i=\alpha} a_i\mu\left(E_i\right)$$

In conclusione si può riscrivere l'integrale come

$$\int\varphi=\sum_{\alpha}\sum_{a_i=\alpha} a_i\mu\left(E_i\right)$$

di cui, scegliendo solo gli indici diversi da 0,

$$\int\varphi=\sum_{i=1}^{k} a_i\mu\left(E_i\right)$$

$\square$

Lemma 5.2. *Siano φ, ψ funzioni semplici non negative, siano a, b due numeri reali positivi, allora si ha che*

$$\int\left(a\varphi+b\psi\right)=a\int\varphi+b\int\psi$$

Dimostrazione. Siano $\varphi=\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i\chi_{E_i}$ e $\psi=\displaystyle\sum_{j=1}^{m} b_j\chi_{F_j}$ le rappresentazioni canoniche delle due funzioni semplici e siano $G_{ij}\stackrel{\text{def}}{=}E_i\cap F_j$ a due a due disgiunti. Pertanto $\varphi=\sum_{i,j} a_i\chi_{G_{ij}}$ e $\psi=\sum_{i,j} b_j\chi_{G_{ij}}$. Si ha dunque che

$$a\varphi+b\psi=\sum_{i,j}\left(aa_j+bb_j\right)\chi_{G_{ij}}$$

e dunque

$$\int\left(a\varphi+b\psi\right)=\sum_{i,j}\left(aa_j+bb_j\right)\mu\left(G_{ij}\right)=a\int\varphi+b\int\psi$$

$\square$

Corollario 5.3. *Sia $\varphi=\displaystyle\sum_{i=1}^{n} c_i\chi_{F_i}$, con $c_i\geq 0$ e F_k famiglia di insiemi misurabili non necessariamente disgiunti. Allora*

$$\int\varphi=\sum_{i=1}^{n} c_i\mu\left(F_i\right)$$

Definizione 5.2. *Sia f una funzione misurabile non negativa, definiamo*

$$\int f=\sup\left\{\int\varphi\,:\,\varphi\text{ è semplice e }0\leq\varphi\leq f\right\}$$

Con questa notazione si dà per sottointeso che l'integrale è fatto su $\mathbb{X}$ rispetto a μ. Quando, per evitare ambiguità, si dovrà specificare lo spazio e la misura si scriverà $\displaystyle\int_{\mathbb{X}} f\,\mathrm{d}\mu$.

Osservazione. *Se* $f \leq g$ *allora* $\int f \leq \int g$ *per le proprietà del* sup.
Se $c \in \mathbb{R}$*, allora* $\int c \cdot f \leq c \cdot \int f$ *per le proprietà del* sup.

5.2 Teoremi di convergenza

Lemma 5.4. (Lemma di Fatou)
Sia $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ *una successione di funzioni misurabili non negative che converge quasi ovunque a una funzione misurabile* f*. Si ha che*

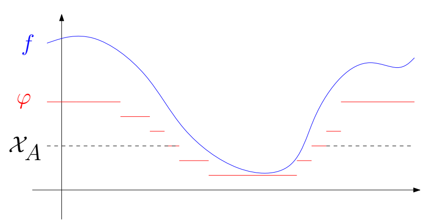
$$\int f \leq \liminf_{n\to\infty} \int f_n$$

Dimostrazione. Si tratta di dimostrare che $\forall \varphi$ semplice tale che $\forall x \in \mathbb{X}$, valga la seguente disuguaglianza $0 \leq \varphi(x) \leq f(x)$, si ha che

$$\int \varphi \leq \liminf_{n\to\infty} \int f_n$$

Si distingueranno due casi $\int \varphi = +\infty$ e $\int \varphi < +\infty$.

- Sia $\int \varphi = +\infty$. Sia dunque $\varphi = \sum_{i=1}^{k} a_i \chi_{E_i}$, si ha che $\int \varphi = \sum_{i=1}^{k} a_i \mu(E_i)$. Inoltre, esiste $i \in \{1, \dots, k\}$ con $a_i \neq 0$ tale che $\mu(E_i) = \infty$. Quindi esistono un insieme A misurabile ed un numero positivo $a \in \mathbb{R}^+$ tali che $\mu(A) = +\infty$ e $\varphi \geq a$ su A (ad esempio $A = E_i$ e $a = \frac{a_i}{2}$).



Per quasi ogni $x \in A$ si ha che

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \geq \varphi(x) \geq a$$

Sia dunque

$$A_n \overset{\text{def}}{=} \bigcap_{k=n}^{\infty} \{f_k \geq a\}$$

Dalle affermazioni precedenti segue che per quasi ogni $x \in A$, $\exists n$ tale che $x \in A_n$, ovvero esiste F misurabile con $\mu(F) = 0$ tale che $A \setminus F \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$.
Ora, dato che $\{A_n\}$ è una successione crescente,

$$lim_{n\to\infty}\mu(A_n) = \mu(\cup_n A_n) \geq \mu(A \setminus F) = \mu(A) = +\infty$$

Quindi si ha che $\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = +\infty$. Osserviamo anche che una funzione f_n sull'insieme A_n è sempre maggiore di a, proprio per definizione di A_n, da cui $f_n \geq a \cdot \chi_{A_n}$. Dunque possiamo concludere che

$$\int f_n \geq \int a \cdot \chi_{A_n} = a \cdot \mu(A_n)$$

e di conseguenza

$$\liminf_{n\to\infty} \int f_n = +\infty = \int f$$

da cui la tesi

$$\int f \leq \liminf_{n\to\infty} \int f_n$$

- Supponiamo ora che $\displaystyle\int \varphi < \infty$. Nel caso in cui $\displaystyle\int \varphi = 0$ la dimostrazione è ovvia. Sia allora $\varphi = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} a_i \chi_{E_i}$ tale che $\mu(E_i) < \infty$ per ogni i tale che $a_i > 0$.

  Definiamo inoltre l'insieme $A \overset{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{X} : \varphi(x) > 0\}$; per le considerazioni precedenti $\mu(A) > 0$. Sia quindi $\varepsilon > 0$ e sia $M \overset{\text{def}}{=} \max_{x\in A} (\varphi(x))$. Considerata dunque la funzione $(1-\varepsilon)\varphi$ si definisce

$$A_n \overset{\text{def}}{=} \bigcap_{k=n}^{+\infty} \{f_k \geq (1-\varepsilon)\varphi\}$$

  Chiaramente vale che $A_k \subseteq A_{k+1}$, da cui anche $A \setminus A_{k+1} \subseteq A \setminus A_k$. Inoltre per quasi ogni $x \in A$, $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \geq \varphi(x) > (1-\varepsilon)\varphi(x)$ e dunque per quasi ogni $x \in A$ si ha che definitivamente vale $f_n(x) \geq (1-\varepsilon)\varphi(x)$, ovvero esiste F insieme misurabile con $\mu(F) = 0$ tale che

$$A \setminus \left(\bigcup_n A_n\right) = F$$

  Utilizzando alcune uguaglianze insiemistiche si ottiene

$$F = A \setminus \left(\bigcup_n A_n\right) = \bigcap_n (A \setminus A_n)$$

  da cui

$$\mu\left(\bigcap_n (A \setminus A_n)\right) = \mu(F) = 0$$

  Ora $\{A \setminus A_n\}$ è una successione decrescente di insiemi contenuti in A e $\mu(A) < \infty$. Sussistono dunque tutte le ipotesi per applicare il teorema 1.15, dal quale si ottiene

$$\lim_{n\to\infty} \mu(A \setminus A_n) = \mu\left(\bigcap_n (A \setminus A_n)\right) = 0$$

  Dal limite segue che $\exists\, n = n(\varepsilon) : \forall k \in \mathbb{N},\ k \geq n,\ \mu(A \setminus A_k) \leq \varepsilon$. Considerando che $\varphi = \varphi\chi_{A_k} + \varphi\chi_{A\setminus A_k}$ e dunque $\varphi\chi_{A_k} = \varphi - \varphi\chi_{A\setminus A_k}$, si ha che

$$\begin{array}{rcl} f_k & \geq & f_k \mathcal{X}_{A_k} \\ & \geq & (1-\varepsilon)\,\varphi\chi_{A_k} \\ & \geq & (1-\varepsilon)\left(\varphi - \varphi\chi_{A\setminus A_k}\right) \\ & \geq & (1-\varepsilon)\,\varphi - \varphi\chi_{A\setminus A_k} \end{array}$$

Per il Lemma 5.2, $\int \varphi = \int \varphi\chi_{A_k} + \int \varphi\chi_{A\setminus A_k}$ da cui

$$(1-\varepsilon)\int \varphi\chi_{A_k} \geq (1-\varepsilon)\int \varphi - \int \varphi\chi_{A\setminus A_k}$$

e quindi

$$\int f_k \geq (1-\varepsilon)\int \varphi - \int \varphi\chi_{A\setminus A_k}$$

ovvero posto M il massimo segue

$$\int f_k \geq (1-\varepsilon)\int \varphi - \varepsilon M = \int \varphi - \varepsilon\left(\int \varphi + M\right)$$

definendo $c \stackrel{\text{def}}{=} \int \varphi + M$ si può riscrivere la disuguaglianza precedente come

$$\int f_k \geq \int \varphi - \varepsilon \cdot c, \ \forall k \geq n(\varepsilon)$$

Quindi $\liminf_{n\to\infty} \int f_n \geq \int \varphi - c\varepsilon$ che, per l'arbitrarietà di ε, implica

$$\liminf_{n\to\infty} \int f_n \geq \int \varphi$$

□

Il lemma di Fatou è ottimale per le ipotesi, poco restrittive, che abbiamo posto sulla successione $\{f_n\}$. Più avanti verranno forniti dei teoremi che affinano il risultato sotto maggiori ipotesi. Si preferisce prima, tuttavia, fornire un esempio di come non valga l'uguaglianza nella tesi del lemma di Fatou e di come, nello stesso tempo, la convergenza delle funzioni non implica che la successione degli integrali abbia limite (da qui la necessità di usare il limite inferiore).

Sia infatti $\mathbb{X} = \mathbb{R}$ e $\{f_n\}$ una successione di funzioni misurabili così definite:

$$f_n(x) = \left(2 + (-1)^n\right)\chi_{[n,n+1]}(x)$$

che tendono alla funzione nulla puntualmente su tutto l'asse reale. Sia dunque f la funzione nulla. Si ha che $\int f = 0$. Invece, per quanto riguarda la successione si ha

$$\int f_n = \begin{cases} 3 & \text{se } n \text{ è pari} \\ 1 & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases}$$

Quindi la successione $\{\int f_n\}$ non converge e $\liminf_{n\to\infty} \int f_n = 1$, valore strettamente maggiore di $\int f = 0$.

Teorema 5.5. (Teorema della convergenza monotona o di Beppo Levi)
Sia $\{f_n\}$ *una successione crescente di funzioni misurabili non negative, allora*

$$\int \lim_{n\to\infty} f_n = \lim_{n\to\infty} \int f_n$$

Dimostrazione. Notiamo che essendo $\{f_n\}$ crescente, $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ esiste in ogni punto x. Sia $f \overset{\text{def}}{=} \lim_{n\to\infty} f_n$, f risulta misurabile e per ipotesi $\forall n \in \mathbb{N}$, $f_n \le f$ e, di conseguenza, $\int f_n \le \int f$. Inoltre, essendo la successione $\left\{\int f_n\right\}$ monotona, si ottiene l'uguaglianza $\liminf_{n\to\infty} \int f_n = \lim_{n\to\infty} \int f_n$.
Applicando il lemma di Fatou si ha

$$\int f \le \liminf_{n\to\infty} \int f_n = \lim_{n\to\infty} \int f_n \le \int f$$

da cui si ottiene

$$\int f = \lim_{n\to\infty} \int f_n$$

□

Proposizione 5.6. *Siano* f, g *funzioni misurabili non negative;* $\forall a, b \ge 0$ *si ha*

$$\int (af + bg) = a \int f + b \int g$$

Dimostrazione. Siano $\{\varphi_n\}$, $\{\psi_n\}$ due successioni crescenti di funzioni semplici tali che $\lim_{n\to\infty} \varphi_n = f$ e $\lim_{n\to\infty} \psi_n = g$. Allora $\{a\varphi_n + b\psi_n\}$ è una successione crescente di funzioni semplici tali che $\lim_{n\to\infty} (a\varphi_n + b\psi_n) = af + bg$. Applicando ripetutamente il teorema di Beppo Levi:

$$\begin{aligned} \int (af + bg) &= \lim_{n\to\infty} \int (a\varphi_n + b\psi_n) \\ &= a \lim_{n\to\infty} \int \varphi_n + b \lim_{n\to\infty} \int \psi_n \\ &= a \int f + b \int g \end{aligned}$$

□

Corollario 5.7. *Sia* $\{f_n\}$ *una successione di funzioni misurabili non negative, allora*

$$\int \sum_{n=1}^{\infty} f_n = \sum_{n=1}^{\infty} \int f_n$$

Dimostrazione. Segue dal fatto che la successione delle somme parziali $\{\sum_{n=1}^{N} f_n\}_N$ è una successione crescente di funzioni misurabili nonnegative. □

Definizione 5.3. *Sia E un insieme misurabile ed f una funzione misurabile non negativa, allora poniamo*

$$\int_E f \stackrel{\text{def}}{=} \int f \mathcal{X}_E$$

Esercizio 5.1. *Sia f misurabile non negativa, $\forall E \in \mathscr{A}$, si ponga*

$$\nu\left(E\right) \stackrel{\text{def}}{=} \int_E f$$

Si dimostri che ν è una misura.

Esercizio 5.2. *Sia f una funzione misurabile non negativa, si dimostri che $\int f = 0$ se e solo se $f = 0$ quasi ovunque.*

Lemma 5.8. (Lemma di Fatou, seconda versione)
Sia $\{f_n\}$ una successione di funzioni misurabili non negative. Allora

$$\int \liminf_{n\to\infty} f_n \leq \liminf_{n\to\infty} \int f_n$$

Dimostrazione. Si ha che, per definizione,

$$\liminf_{n\to\infty} f_n = \sup_n \inf_{k\geq n} f_k$$

Si definiscono le funzioni

$$g_n\left(x\right) \stackrel{\text{def}}{=} \inf_{k\geq n} f_k\left(x\right)$$

La successione $\{g_n\}$ è una successione crescente di funzioni misurabili non negative. Si definisce inoltre $f \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{n\to\infty} g_n = \liminf_{n\to\infty} f_n$. Per il teorema di Beppo Levi

$$\int f = \lim_{n\to\infty} \int g_n$$

inoltre, essendo $g_n \leq f_n$, si ha $\int g_n \leq \int f_n$, da cui la tesi

$$\int f = \lim_{n\to\infty} \int g_n \leq \liminf_{n\to\infty} \int f_n$$

□

Definizione 5.4. *Una funzione misurabile f non negativa di dice integrabile se e solo se $\displaystyle\int f < \infty$.*

Definizione 5.5. *Una funzione misurabile f si dice integrabile se f^+, f^- sono entrambe integrabili e si pone $\displaystyle\int f \stackrel{\text{def}}{=} \int f^+ - \int f^-$.*

Proposizione 5.9. *Valgono le seguenti affermazioni:*

- *Siano f, g due funzioni integrabili e a, b due numeri reali, allora $af + bg$ è integrabile e vale $\int (af + bg) = a \int f + b \int g$.*
- *Sia h una funzione misurabile e f una funzione integrabile, se $|h| \leq |f|$ allora h è integrabile.*
- *Siano f, g due funzioni integrabili e $f \leq g$, allora $\displaystyle\int f \leq \int g$.*

Dimostrazione. Per esercizio □

Teorema 5.10. (Teorema della convergenza dominata o di Lebesgue)
Sia $\{f_n\}$ una successione di funzioni misurabili tali che esiste una funzione f misurabile per cui $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ quasi ovunque. Se esiste una funzione g non negativa integrabile tale che $\forall n \in \mathbb{N}$, $|f_n| \leq g$, allora esiste

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n$$

e vale

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n = \int f.$$

Dimostrazione. Si ha che le funzioni $g - f_n$ e $g + f_n$, per ogni n, sono funzioni misurabili non negative. Dunque, applicando il lemma di Fatou,

$$\int \lim_{n\to\infty} (g - f_n) \leq \liminf_{n\to\infty} \int (g - f_n)$$

$$\int \lim_{n\to\infty} (g + f_n) \leq \liminf_{n\to\infty} \int (g + f_n)$$

e successivamente utilizzando la linearità dell'integrale rispetto alla funzione integranda

$$\int g - \int \lim_{n\to\infty} f_n \leq \int g - \limsup_{n\to\infty} \int f_n$$

$$\int g + \int \lim_{n\to\infty} f_n \leq \int g + \liminf_{n\to\infty} \int f_n$$

e, per la definizione di f,

$$\int g - \int f \leq \int g - \limsup_{n\to\infty} \int f_n$$

$$\int g + \int f \leq \int g + \liminf_{n\to\infty} \int f_n$$

semplificando le due disequazioni e invertendo i segni nella prima

$$\limsup_{n\to\infty} \int f_n \leq \int f$$

$$\int f \leq \liminf_{n\to\infty} \int f_n$$

da cui, ovviamente

$$\int f \leq \liminf_{n\to\infty} \int f_n \leq \limsup_{n\to\infty} \int f_n \leq \int f$$

Quindi esiste $\lim_{n\to\infty} \int f_n$ e vale $\int f = \lim_{n\to\infty} \int f_n$. $\square$

Teorema 5.11. (Teorema di derivazione sotto integrale)
Sia $(\mathbb{X}, \mathscr{A}, \mu)$ uno spazio con misura, siano $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$ e sia f una funzione definita su $\mathbb{X} \times [a, b]$ tale che

- $\forall t \in [a, b]$, $f(\cdot, t)$ *è misurabile.*
- $\forall x \in \mathbb{X}$, $f(x, \cdot)$ *è derivabile.*
- *Esiste g funzione integrabile non negativa su $\mathbb{X}$ tale che*

$$|f(x,t)| + \left|\frac{\partial}{\partial t} f(x,t)\right| \leq g(x)$$

allora $\frac{\partial}{\partial t} f(\cdot, t)$ è integrabile, $\int_{\mathbb{X}} f(x,t)\, d\mu(x)$ è derivabile in t e vale

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{X}} f(x,t)\, d\mu(x) = \int_{\mathbb{X}} \frac{\partial}{\partial t} f(x,t)\, d\mu(x)$$

Dimostrazione. Per esercizio. $\square$

Proposizione 5.12. *Si consideri f funzione integrabile su $\mathbb{X}$, allora l'insieme $\{x \in \mathbb{X} : f(x) \neq 0\}$ è σ-finito.*

Dimostrazione. Si ha che

$$\{f \neq 0\} = \{|f| > 0\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{|f| > \frac{1}{n}\right\}$$

ed inoltre

$$|f| \geq \frac{1}{n} \chi_{\{|f| \geq \frac{1}{n}\}}$$

Dunque, passando agli integrali,

$$\int |f| \geq \int \left(\frac{1}{n} \chi_{\{|f| \geq \frac{1}{n}\}}\right) = \frac{1}{n} \mu\left(\left\{|f| > \frac{1}{n}\right\}\right)$$

da cui si ottiene che per ogni n

$$\mu\left(\left\{|f| > \frac{1}{n}\right\}\right) \leq n \int |f| < \infty$$

Dunque ogni insieme $\mu\left(\left\{|f| > \frac{1}{n}\right\}\right)$ ha misura finita, e la loro unione, come mostrato dalla prima equazione, ci dà $\{f \neq 0\}$. $\square$

Nella proposizione precedente abbiamo fatto uso di un argomento che ricorrerà anche nel seguito. Enunciamolo nel seguente teorema.

Teorema 5.13. (Disuguaglianza di Chebyshev)
Sia f una funzione misurabile non negativa, allora $\forall t \geq 0$, vale la seguente disequazione:

$$\mu\big(\{f \geq t\}\big) \leq \frac{1}{t} \int f$$

Dimostrazione. Si ha subito che

$$f \geq t \cdot \chi_{\{f \geq t\}}$$

e dunque passando all'integrale

$$\int f \geq t \cdot \mu\left(\{f \geq t\}\right)$$

e dividendo per t si ha la tesi. □

Proposizione 5.14. *Sia f una funzione integrabile, per ogni $\varepsilon > 0$, $\exists M > 0$ e una funzione integrabile f_M tale che $|f_M| \leq M$ per cui $\int |f - f_M| \leq \varepsilon$.*

Dimostrazione. Per ogni $M > 0$ poniamo

$$f_M\left(x\right) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} M & \text{se } f(x) > M \\ f(x) & \text{se } -M \leq f(x) \leq M \\ -M & \text{se } f(x) < -M \end{cases}$$

Si ha che la successione monotona di funzioni $\{|f_M(x)|\}$ converge a $|f|$ dal basso e dunque si puó applicare il teorema di Beppo Levi ottenendo che

$$\lim_{M \to \infty} \int |f_M| = \int |f|$$

Si ha dunque che

$$f - f_M = \begin{cases} f - M & \text{se } f(x) > M \\ 0 & \text{se } -M \leq f(x) \leq M \\ f + M & \text{se } f(x) < -M \end{cases}$$

e quindi

$$|f - f_M| = \begin{cases} 0 & \text{se } |f(x)| \leq M \\ |f| - M & \text{se } |f(x)| > M \end{cases}$$

Quindi, per i valori che assume $|f_M|$, si verifica che $|f - f_M| = |f| - |f_M|$. Passando all'integrale

$$\int |f - f_M| = \int |f| - \int |f_M|$$

Facendo tendere M all'infinito si ha

$$\lim_{M \to \infty} \int |f - f_M| = \int |f| - \lim_{M \to \infty} \int |f_M| = \int |f| - \int |f| = 0$$

E dunque, utilizzando la definizione di limite, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists M > 0$ tale che $\displaystyle\int |f - f_M| \leq \varepsilon$, e dunque il teorema è dimostrato. □

Teorema 5.15. (Assoluta continuità dell'integrale)
Sia f una funzione integrabile, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ *tale che* $\forall A \in \mathscr{A}$ *con* $\mu(A) < \delta$ *si ha* $\displaystyle\int_A |f| < \varepsilon$.

Dimostrazione. Sia $M = M(\varepsilon)$ e sia f_M definita come nella precedente proposizione 5.14. Si ha dunque che $\forall A \in \mathscr{A}$

$$\int_A |f_M| \leq M\mu(A)$$

Sia $\delta = \dfrac{\varepsilon}{M}$ e sia $A \in \mathscr{A}$ tale che $\mu(A) < \delta$,

$$\int_A |f| \leq \int_A (|f_M| + |f - f_M|) = \int_A |f_M| + \int_A |f - f_M| \leq \int_A |f_M| + \int_{\mathbb{X}} |f - f_M|$$

Per la proposizione 5.14 si ha che $\displaystyle\int |f - f_M| \leq \varepsilon$, dunque

$$\int_A |f| \leq \int_A |f_M| + \int_{\mathbb{X}} |f - f_M| \leq M\mu(A) + \varepsilon = 2\varepsilon$$

La tesi segue a meno di sostituire ε con $\varepsilon/2$. □

Esercizio 5.3. *Si enunci e si dimostri una versione del lemma di Fatou e una del teorema di convergenza dominata per successioni* $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ *convergenti in misura.*

5.3 Integrale di Riemann e di Lebesgue

Teorema 5.16. *Se f è una funzione definita su* $[a, b] \mapsto \mathbb{R}$ *limitata e integrabile secondo Riemann, allora è integrabile secondo Lebesgue e gli integrali coincidono.*

Dimostrazione. Indicheremo, per semplicità di notazione, con $\displaystyle\int_a^b f$ l'integrale secondo Riemann mentre con $\displaystyle\int_{[a,b]} f$ l'integrale secondo Lebesgue.
Ricordiamo preliminarmente la definizione di integrale secondo Riemann: f è integrabile secondo Riemann se l'integrale inferiore

$$\underline{\int} f \stackrel{\text{def}}{=} \sup \left\{ \int_a^b \varphi : \varphi \text{ a scalino, } \varphi \leq f \right\}$$

e l'integrale superiore

$$\overline{\int} f \stackrel{\text{def}}{=} \inf \left\{ \int_a^b \psi : \psi \text{ a scalino, } \psi \geq f \right\}$$

sono coincidenti e in tal caso si pone

$$\int_a^b f \stackrel{\text{def}}{=} \underline{\int} f = \overline{\int} f \ .$$

Pertanto, se f è integrabile secondo Riemann, si possono costruire due successioni $\{\varphi_n\}$ e $\{\psi_n\}$ di funzioni a scalino tali che $\forall n \in \mathbb{N}$, $\varphi_n \le \varphi_{n+1} \le f \le \psi_{n+1} \le \psi_n$ e in modo che si abbia $\lim_{n\to\infty}\int_a^b \varphi_n = \int_a^b f = \lim_{n\to\infty}\int_a^b \psi_n$. Siano $\underline{f} \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{n\to\infty} \varphi_n$ e $\overline{f} \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{n\to\infty} \psi_n$; per quanto affermato dal teorema 4.11 sono entrambe funzioni misurabili rispetto alla misura di Lebesgue e sono tali che $\underline{f} \le f \le \overline{f}$. Inoltre, per il teorema della convergenza dominata

$$\int_{[a,b]} \underline{f} = \lim_{n\to\infty}\int_{[a,b]} \varphi_n = \lim_{n\to\infty}\int_a^b \varphi_n = \int_a^b f$$

in modo del tutto analogo si ha che

$$\int_{[a,b]} \overline{f} = \lim_{n\to\infty}\int_{[a,b]} \psi_n = \lim_{n\to\infty}\int_a^b \psi_n = \int_a^b f$$

Dunque, essendo $\int_{[a,b]} \left(\overline{f} - \underline{f}\right) = 0$, per quanto visto nell'esercizio 5.2, si ha che $\overline{f} = \underline{f}$ quasi ovunque e pertanto $f = \underline{f}$ quasi ovunque. Quindi f è misurabile, ed inoltre

$$\int_{[a,b]} f = \int_{[a,b]} \overline{f} = \int_{[a,b]} \underline{f} = \int_a^b f$$

□

Il seguente risultato caratterizza le funzioni integrabili secondo Riemann attraverso l'uso della misura di Lebesgue.

Teorema 5.17. *Sia $f : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$ una funzione limitata, allora f è integrabile secondo Riemann se e solo se l'insieme dei punti di discontinuità di f ha misura nulla secondo Lebesgue.*

Dimostrazione. Supponiamo f integrabile secondo Riemann. Allora esistono due successioni di funzioni a scalino $\{\varphi_n\}$ e $\{\psi_n\}$ tali che $\forall n \in \mathbb{N}$, $\varphi_n \le \varphi_{n+1} \le f \le \psi_{n+1} \le \psi_n$ e in modo che si abbia $\lim_{n\to\infty}\int_a^b \varphi_n = \int_a^b f = \lim_{n\to\infty}\int_a^b \psi_n$. Siano $\underline{f} \stackrel{\text{def}}{=} \sup_n \varphi_n$ e $\overline{f} \stackrel{\text{def}}{=} \inf_n \psi_n$. Quindi si ha $\overline{f} - \underline{f} = 0$ q.o.. Sia Z l'insieme di misura nulla dove $\overline{f} > \underline{f}$. Sia Γ_k l'insieme finito dei punti di discontinuità di almeno una delle funzioni $\varphi_1, \dots, \varphi_k, \psi_1, \dots, \psi_k$. Chiaramente $\Gamma_k \subset \Gamma_{k+1}$ per ogni k. Sia $\Gamma = \cup_k \Gamma_k$, Γ è numerabile quindi ha misura di Lebesgue nulla. Sia $F = \Gamma \cup Z$, sia $x \in (a,b) \setminus F$ e supponiamo **per assurdo** che f non sia continua in x. Allora esiste $\varepsilon > 0$ tale che per ogni $\delta > 0$ esistono $x', x'' \in (x-\delta, x+\delta)$ tali che $f(x'') - f(x') \ge \varepsilon$. Dato che $x \notin \Gamma$, per ogni k, $x \notin \Gamma_k$, che è finito, e quindi esiste $\delta = \delta(k)$ tale che $\operatorname{dist}(x, \Gamma_k) > \delta$. Allora φ_k, ψ_k sono costanti in $(x-\delta, x+\delta)$. Pertanto $\varphi_k(x) = \varphi_k(x') \le f(x') \le f(x'') - \varepsilon \le \psi_k(x'') - \varepsilon = \psi_k(x) - \varepsilon$. Cioè $\varphi_k(x) \le \psi_k(x) - \varepsilon$ per ogni k, ovvero $\underline{f}(x) \le \overline{f}(x) - \varepsilon$, ossia $x \in Z$, il che **è assurdo**.

Viceversa, sia f continua quasi ovunque. Consideriamo una successione di funzioni a scalino $\{\varphi_k\}$ minoranti f tali che $\lim_{k\to\infty} \int_a^b \varphi_k = \underline{\int} f$. Poniamo

$$\varphi_k = \sum_{j=1}^{J_k} a_j^k \chi_{I_j^k}$$

dove $I_1^k, \dots, I_{J_k}^k$ sono intervalli disgiunti. Non è restrittivo supporre che

$$p_k \stackrel{\text{def}}{=} \max_j \ell(I_j^k) \to 0 \text{ per } k \to \infty \ ,$$

$$a_j^k = \inf_{I_j^k} f \ .$$

Analogamente si può procedere con funzioni a scalino $\{\psi_k\}$ maggioranti f e tali che $\lim_{k\to\infty} \int_a^b \psi_k = \overline{\int} f$. Quindi (eventualmente raffinando la partizioni individuate prima) possiamo porre

$$\psi_k = \sum_{j=1}^{J_k} b_j^k \chi_{I_j^k}$$

dove gli I_j^k sono come sopra e vale

$$b_j^k = \sup_{I_j^k} f \ .$$

Sia x un punto di continuità per f. Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che se I è un intervallo tale che $x \in I$ e $\ell(I) < \delta$ si ha

$$\sup_I f - \inf_I f < \varepsilon \ .$$

Sia allora $K = K(\varepsilon)$ tale che $p_k < \delta$ per ogni $k \geq K$. Quindi

$$\psi_k(x) - \varphi_k(x) < \varepsilon \ \forall k \geq K \ .$$

In altri termini

$$\lim_{k\to\infty} (\psi_k(x) - \varphi_k(x)) = 0 \ ,$$

ovvero

$$\lim_{k\to\infty} (\psi_k - \varphi_k) = 0 \text{ q.o. su } [a,b] \ .$$

Inoltre $|\psi_k - \varphi_k| \leq 2 \sup_{[a,b]} |f| < \infty$. Quindi per la convergenza dominata

$$\overline{\int} f - \underline{\int} f = \lim_{k\to\infty} \int_a^b (\psi_k - \varphi_k) = 0 \ ,$$

ovvero f è integrabile secondo Riemann. □

Abbiamo dunque dimostrato che ogni funzione integrabile secondo Riemann è integrabile secondo Lebesgue. Inoltre abbiamo caratterizzato le funzioni integrabili secondo Riemann facendo proprio ricorso alla misura di Lebesgue. Questa caratterizzazione ci mostra anche che nell'ambito delle funzioni limitate su un intervallo limitato, la classe delle funzioni integrabili secondo Lebesgue è più ampia. La funzione di Dirichlet ne è un esempio.

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{se } x \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \end{cases}$$

La funzione $f(x)$ è chiaramente integrabile secondo Lebesgue, perché è quasi ovunque la funzione nulla. Invece, su ogni intervallo limitato l'integrale secondo Riemann di questa funzione non esiste perché integrale superiore e inferiore sono diversi.

Vediamo di estendere il confronto con l'integrale di Lebesgue su intervalli della retta all'integrale improprio, cioè nei casi di funzioni illimitate su intervalli limitati o di funzioni definite su intervalli illimitati. Per chiarezza, fissiamo l'attenzione su quest'ultimo caso. Considerazioni analoghe si possono fare nel caso di funzioni definite su un intervallo limitato che sono illimitate ad un estremo. Richiamiamo la definizione di integrale improprio.

Consideriamo $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ che sia integrabile secondo Riemann su ogni intervallo finito $[a, b]$ con $b > a$. Si dice che f ha integrale improprio convergente se esiste finito il limite

$$\lim_{b \to +\infty} \int_a^b f(x)dx$$

e si pone

$$\int_a^{+\infty} f \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{b \to +\infty} \int_a^b f(x)dx \ .$$

Si dice poi che f ha integrale improprio *assolutamente convergente* se $|f|$ ha integrale improprio convergente. Col criterio di Cauchy si verifica facilmente che l'assoluta convegenza implica la convergenza semplice. Diamo un esempio che mostra come non sia vero il viceversa.

Si consideri infatti la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

Si verifica facilmente che $f(x)$ è definita su tutto l'asse reale ed è continua, e pertanto integrabile secondo Riemann su ogni sottointervallo limitato. Preso $b > 1$ calcoliamo

$$\int_0^b f(x)dx = \int_0^1 f(x)dx + \int_1^b \frac{\sin x}{x} dx =$$

integrando per parti, si ottiene

$$= \int_0^1 f(x)dx + \Big[-\frac{\cos x}{x} \Big]_1^b + \int_1^b \frac{\cos x}{x^2} dx \ .$$

Ora, vale la maggiorazione

$$|\frac{\cos x}{x^2}| \leq |\frac{1}{x^2}|$$

e quest'ultima funzione ha integrale improprio assolutamente convegente su $[1, +\infty)$ quindi esiste finito

$$\lim_{b \to +\infty} \int_1^b \frac{\cos x}{x^2} dx = \int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx$$

e di conseguenza esiste finito

$$\lim_{b\to+\infty}\int_0^b f(x)dx = \int_0^1 f(x)dx + \cos(1) + \int_1^{+\infty}\frac{\cos x}{x^2}dx \ .$$

Dunque f ammette integrale improprio convergente su $[0,+\infty]$. Tuttavia non si ha convergenza assoluta. Infatti, preso $k = 1, 2, \ldots$, si ha

$$\left|\frac{\sin x}{x}\right| \geq \frac{1}{(k+1)\pi}\,|\sin x| \ \text{, per ogni } x \in [k\pi,(k+1)\pi] \ ,$$

e quindi

$$\begin{aligned} &\lim_{k\to+\infty}\int_0^{(k+1)\pi}|f(x)|dx \geq \\ \geq \int_0^\pi |f(x)|dx &+ \lim_{k\to+\infty}\sum_{h=1}^{k}\frac{1}{(h+1)\pi}\int_0^\pi \sin x dx = \\ &= \int_0^\pi |f(x)|dx + \sum_{h=1}^{+\infty}\frac{2}{(h+1)\pi} = +\infty \ . \end{aligned}$$

Stabiliamo ora il seguente risultato di confronto tra integrale improprio e di Lebesgue.

Teorema 5.18. *Sia* $f : [a,+\infty) \mapsto \mathbb{R}$ *una funzione integrabile secondo Riemann su ogni sottointervallo limitato.* f *ha integrale improprio* assolutamente *convergente se e solo se* f *è integrabile secondo Lebesgue su* $[a,+\infty)$ *e in tal caso vale*

$$\int_a^{+\infty} f = \int_{[a,+\infty)} f \ . \tag{5.1}$$

Quindi l'esempio precedente mostra che ci sono funzioni dotate di integrale improprio (convergente solo in senso semplice, *non assoluto*) che *non* sono integrabili nel senso di Lebesgue.

Dimostrazione. Poniamo $g_N \stackrel{\text{def}}{=} |f|\chi_{[a,N]}$ pe ogni $N = 1, 2, \ldots$. f ha integrale improprio assolutamente convergente se e solo se esiste finito

$$\lim_{N\to+\infty}\int_a^N |f(x)|dx \ .$$

Ora segue dal teorema 5.16 che

$$\int_a^N |f(x)|dx = \int_{[a,+\infty)} g_N$$

e $\{g_N\}$ è una successione crescente di funzioni misurabili che ha limite $|f|$, quindi per la convergenza dominata,

$$\lim_{N\to+\infty}\int_a^N |f(x)|dx = \int_{[a,+\infty)} |f| \ .$$

Ovvero f ha integrale improprio assolutamente convergente se e solo se f è integrabile secondo Lebesgue. Inoltre, se f è integrabile secondo Lebesgue, per ogni successione $\{b_n\} \to +\infty$, si ottiene

$$\int_a^{b_n} f(x)dx = \int_{[a,+\infty)} f\chi_{[a,b_n]} \to \int_{[a,+\infty)} f$$

grazie alla convergenza dominata, ovvero vale (5.1). $\square$

Capitolo 6

Misure prodotto

In questo breve capitolo affronteremo il problema di come definire una misura su un insieme ottenuto tramite prodotto cartesiano di due spazi di misura completi.

6.1 Prodotto di spazi con misura

Definizione 6.1. *Siano* $(\mathbb{X}, \mathscr{A}, \mu)$ *e* $(\mathbb{Y}, \mathscr{B}, \nu)$ *due spazi con misura completi. Sia* $\mathscr{R} \stackrel{\text{def}}{=} \{A \times B \ : \ A \in \mathscr{A},\, B \in \mathscr{B}\}$*. Gli elementi di* $\mathscr{R}$ *si dicono "rettangoli misurabili" di* $\mathbb{X} \times \mathbb{Y}$*.*

Proposizione 6.1. *L'insieme* $\mathscr{R}$ *definito nella proposizione precedente è una semialgebra.*

Dimostrazione. Dimostriamo che gode di tutte le proprietà di una semialgebra

- Siano $(A \times B)$ e $(C \times D)$ due elementi di $\mathscr{R}$.

  Allora si verifica che $(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (C \cap D)$ e pertanto, essendo $(A \cap C) \in \mathscr{A}$ e $(B \cap D) \in \mathscr{B}$, si ha che $(A \times B) \cap (C \times D) \in \mathscr{R}$.

- Sia $(A \times B) \in \mathscr{R}$. Allora $\mathscr{C}(A \times B) = (\mathbb{X} \times \mathscr{C}(B)) \cup (\mathscr{C}(A) \times B)$, e quindi il complementare è unione disgiunta finita di elementi di $\mathscr{R}$.

□

Definizione 6.2. *Per ogni* $A \times B \in \mathscr{R}$*, definiamo una funzione d'insieme* λ *come* $\lambda(A \times B) \stackrel{\text{def}}{=} \mu(A) \cdot \nu(B)$*, sottintendendo che* $\lambda(A \times B) = 0$ *se uno dei due fattori* $\mu(A), \nu(B)$ *è nullo (anche se l'altro è* $= \infty$*!).*

Teorema 6.2. *La funzione d'insieme* λ *è una misura sulla semialgebra* $\mathscr{R}$*.*

Dimostrazione. Si ha che $\lambda(\emptyset) = \lambda(\emptyset \times \emptyset) = \mu(\emptyset) \cdot \nu(\emptyset) = 0$, e pertanto la prima proprietà è dimostrata. Rimangono da dimostrare le proprietà di additività finita e la subadditività numerabile. Dimostreremo in una sola volta la proprietà di additività numerabile, che implica entrambe le proprietà che ci servono.

Sia dunque $\{A_i \times B_i\}_{i=1}^{\infty}$ una successione di rettangoli misurabili disgiunti tali che $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \times B_i \in \mathscr{R}$ e sia $A \times B \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i \times B_i$. Per ogni $x \in A$ fissato e per ogni $y \in B$ esiste un unico indice i tale che $(x, y) \in A_i \times B_i$, dunque poniamo $\forall x \in A$

$$I_x \stackrel{\text{def}}{=} \{i \in \mathbb{N} : \exists y \in B \text{ per cui } (x, y) \in A_i \times B_i\}$$

Si ha dunque che

$$\forall x \in A, \bigcup_{i \in I_x} B_i = B \text{ ed inoltre } \forall i, j \in I_x,\ i \neq j,\ B_i \cap B_j = \emptyset$$

Essendo pertanto un'unione disgiunta, valgono le seguenti uguaglianze (l'ultima è data dal teorema di convergenza monotona):

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{\infty} \lambda (A_i \times B_i) &= \sum_{i=1}^{\infty} \mu (A_i) \nu (B_i) \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \nu (B_i) \int_{A_i} \mathrm{d}\mu \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \nu (B_i) \int_{\mathbb{X}} \chi_{A_i}(x) \, \mathrm{d}\mu \\
&= \int_{\mathbb{X}} \sum_{i=1}^{\infty} \nu (B_i) \chi_{A_i}(x) \, \mathrm{d}\mu
\end{aligned}$$

Considerando ora che $x \in A_i$ se e solo se $i \in I_x$, se $x \in A$ si ha:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \nu (B_i) \chi_{A_i}(x) = \sum_{i \in I_x} \nu (B_i) \chi_{A_i}(x) = \sum_{i \in I_x} \nu (B_i) = \nu (B)$$

Se invece $x \notin A$:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \nu (B_i) \chi_{A_i}(x) = 0$$

Dunque $\forall x \in \mathbb{X}$ si ha che:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \nu (B_i) \chi_{A_i}(x) = \nu (B_i) \chi_A(x)$$

si ottiene che

$$\sum_{i=1}^{\infty} \lambda (A_i \times B_i) = \int_{\mathbb{X}} \nu (B) \chi_A \, \mathrm{d}\mu = \nu (B) \mu (A) = \lambda (A \times B)$$

□

A partire dalla misura λ sulla semialgebra $\mathscr{R}$ si può costruire mediante il procedimento di Caratheodory una misura su $\mathbb{X} \times \mathbb{Y}$, che si indica con $\mu \times \nu$, ed una corrispondente σ-algebra, che si indica con $\mathscr{A} \times \mathscr{B}$, costituita dagli insiemi in $\mathbb{X} \times \mathbb{Y}$ che sono λ^*-misurabili, dove λ^* è la misura esterna indotta da λ.
Ci si chiede ora come determinare la misura di un sottoinsieme del prodotto, usando misura e integrale sugli spazi $\mathbb{X}$ e $\mathbb{Y}$.

Definizione 6.3. *Sia $E \subseteq \mathbb{X} \times \mathbb{Y}$, allora preso $x \in \mathbb{X}$ si pone:*

$$E_x = \{y \in \mathbb{Y} : (x, y) \in E\}$$

E_x è detta x-sezione di E.
Analogamente preso $y \in \mathbb{Y}$ si pone:

$$E_y = \{x \in \mathbb{X} : (x, y) \in E\}$$

E_y è detta y-sezione di E.

Osserviamo che vale

$$\chi_E(x, y) = \chi_{E_x}(y) = \chi_{E_y}(x)$$

Lemma 6.3. *Sia $E \in \mathscr{R}_{\sigma\delta}$; per ogni $x \in \mathbb{X}$, E_x è ν-misurabile.*

Dimostrazione. Se $E \in \mathscr{R}$, allora $E = A \times B$. Allora $\forall x \in A$

$$\chi_{E_x}(y) = \chi_E(x, y) = \chi_{A\times B}(x, y) = \chi_A(x)\chi_B(y) = \chi_B(y)$$

Se invece $x \notin A$, $\chi_{E_x}(y) \equiv 0$ e quindi $\chi_{E_x}(y)$ è misurabile, di conseguenza E_x è misurabile.

Sia ora $E \in \mathscr{R}_\sigma$, dunque $E = \displaystyle\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$, con $E_i \in \mathscr{R}$.

$$\chi_{E_x}(y) = \chi_E(x, y) = \sup_{i\in\mathbb{N}} \chi_{E_i}(x, y) = \sup_{i\in\mathbb{N}} \chi_{(E_i)_x}(y)$$

Applicando il teorema 4.11, si ha che χ_{E_x} è misurabile, essendo sup di funzioni misurabili, da cui nuovamente E_x è misurabile.
Infine, se $E_i \in \mathscr{R}_{\sigma\delta}$, allora $E = \bigcap_{i=1}^{\infty} E_i$ con $E_i \in \mathscr{R}_\sigma$. In modo analogo al caso precedente

$$\chi_{E_x}(y) = \chi_E(x, y) = \inf_{i\in\mathbb{N}} \chi_{E_i}(x, y) = \inf_{i\in\mathbb{N}} \chi_{(E_i)_x}(y)$$

e, sempre grazie al teorema 4.11, si ha che χ_{E_x} è misurabile, essendo inf di funzioni misurabili. □

Lemma 6.4. *Sia $E \in \mathscr{R}_{\sigma\delta}$, con $\mu \times \nu\,(E) < \infty$. Sia $g(x) = \nu\,(E_x)$; allora $g(x)$ è μ-misurabile e vale*

$$\int_{\mathbb{X}} g(x)\, d\mu = \mu \times \nu\; (E)$$

Dimostrazione. Se $E \in \mathscr{R}$ il lemma è verificato: se $E = A \times B$, $E_x = B$ se $x \in A$, mentre $E_x = \phi$ se $x \notin A$, quindi $g(x) = \nu(B)\chi_A(x)$.

Supponiamo ora che $E \in \mathscr{R}_\sigma$, allora $E = \displaystyle\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$ con $E_i \in \mathscr{R}$. Senza ledere di generalità, possiamo supporre che gli E_i siano a due a due disgiunti. Siani inoltre $E_i = A_i \times B_i$ e sia $g_i(x) = \nu(B_i)\chi_{A_i}(x)$. Si ha che

$$g(x) = \sum_{i=1}^{\infty} g_i(x)$$

Quindi g è somma di funzioni misurabili non negative, dunque è misurabile e

$$\int_{\mathbb{X}} g(x)\,\mathrm{d}\mu = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{\mathbb{X}} g_i\,\mathrm{d}\mu = \sum_{i=1}^{\infty} \mu \times \nu\left(E_i\right) = \mu \times \nu\left(E\right)$$

Si noti che non si è ancora usata l'ipotesi che $\mu \times \nu(E) < \infty$. Questa diventa però essenziale quando si suppone che $E \in \mathscr{R}_{\sigma\delta}$, ovvero $E = \bigcap_{i=1}^{\infty} E_i$ con $E_i \in \mathscr{R}_{\sigma}$.
Dato che $\mu \times \nu(E) < \infty$ si può scegliere E_1 tale che $\mu \times \nu\left(E_1\right) < \infty$ e inoltre $E_{i+1} \subseteq E_i$ per ogni i. Se non dovesse essere così ci si può ricondurre a questo caso definendo induttivamente $E'_{i+1} = E_{i+1} \cap E'_i$ per ogni i ed $E'_0 = E_0$, perché effettuando intersezioni finite si rimane all'interno di $\mathscr{R}_{\sigma}$. Sia $g_i(x) = \nu\left(\left(E_i\right)_x\right)$, e dunque le funzioni g_i formano una successione decrescente di funzioni, $g_i \geq g_{i+i}$ $\forall i$.
Si prova che $g(x) = \lim_i g_i(x)$ per quasi ogni $x \in \mathbb{X}$: infatti

$$\int_{\mathbb{X}} g_1\,\mathrm{d}\mu = \mu \times \nu(E_1) < +\infty$$

dunque g_1 è quasi ovunque finita; sia $x \in \mathbb{X}$ tale che $g_1(x) < +\infty$; allora $\{(E_i)_x\}$ è una successione descrescente di insiemi e $\nu\left((E_1)_x\right) = g_1(x) < +\infty$, quindi:

$$g(x) = \nu\left(E_x\right) = \nu\left(\bigcap_{i\in\mathbb{N}} (E_i)_x\right) = \lim_i \nu\big((E_i)_x\big) = \lim_i g_i(x) \quad \text{per q.o. } x$$

quindi si ha l'affermazione precedente; essendo $\mathbb{Y}$ completo, g è misurabile, perché è quasi ovunque uguale ad una funzione misurabile; allora $0 \leq g_i \leq g_1$ e g_1 è integrabile, dunque si può applicare il teorema di convergenza dominata e si ottiene che

$$\int g\,\mathrm{d}\mu = \int \lim_i g_i\,\mathrm{d}\mu = \lim_i \int g_i\,\mathrm{d}\mu = \lim_i \mu\times\nu(E_i) = \mu\times\nu\left(\bigcap_i E_i\right) = \mu\times\nu(E)$$

□

Lemma 6.5. *Sia $E \subseteq \mathbb{X} \times \mathbb{Y}$ tale che $\mu \times \nu(E) = 0$; allora $\nu(E_x) = 0$ per quasi ogni $x \in \mathbb{X}$.*

Dimostrazione. $\exists F \in \mathscr{R}_{\sigma\delta} : E \subseteq F$ e $\mu \times \nu(F) = 0$; allora per quasi ogni $x \in \mathbb{X}$, $\nu(F_x) = 0$, $E_x \subseteq F_x$ e quindi per la completezza di $\mathbb{Y}$ anche E_x è misurabile e $\nu(E_x) = 0$. □

Proposizione 6.6. *Sia $E \subseteq \mathbb{X} \times \mathbb{Y}$ $\mu \times \nu$-misurabile e tale che $\mu \times \nu(E) < +\infty$; allora per quasi ogni $x \in \mathbb{X}$, E_x è misurabile, la funzione $g(x) = \nu(E_x)$ è μ-misurabile e vale $\int_{\mathbb{X}} g\,\mathrm{d}\mu = \mu \times \nu(E)$.*

Dimostrazione. $\exists F \in \mathscr{R}_{\sigma\delta} : E \subseteq F$ e $\mu \times \nu(F) = \mu \times \nu(E)$; sia $G = F \setminus E$; allora $\mu \times \nu(G) = 0$ perché gli insiemi E ed F hanno misura finita. Si ha che per il lemma precedente $\nu(G_x) = 0$ per quasi ogni x e vale

$$\int_{\mathbb{X}} \nu(F_x)\,\mathrm{d}\mu = \mu \times \nu(F) = \mu \times \nu(E)$$

Sia $x \in \mathbb{X}$ tale che $\nu(F_x) < +\infty$ ed anche $\nu(G_x) = 0$; allora $E_x = F_x \setminus G_x$, quindi si ha che $\nu(E_x) = \nu(F_x)$ per quasi ogni x, e dunque:

$$\int_{\mathbb{X}} g \, \mathrm{d}\mu = \int_{\mathbb{X}} \nu(E_x) \, \mathrm{d}\mu = \int_{\mathbb{X}} \nu(F_x) \, \mathrm{d}\mu = \mu \times \nu(E)$$

□

Questa proposizione implica facilmente una versione astratta del principio di Cavalieri

Corollario 6.7. (Principio di Cavalieri)
Siano E, F $\mu \times \nu$-misurabili e di misura finita; se vale che $\nu(E_x) = \nu(F_x)$ per quasi ogni x, allora $\mu \times \nu(E) = \mu \times \nu(F)$.

Teorema 6.8. (Teorema di Fubini)
Siano $(\mathbb{X}, \mathscr{A}, \mu)$ e $(\mathbb{Y}, \mathscr{B}, \nu)$ due spazi con misura completi. Sia $f = f(x, y)$ una funzione $\mu \times \nu$-integrabile; allora:

1. *per quasi ogni $x \in \mathbb{X}$, $f_x(y) = f(x, y)$ è ν-integrabile*
2. *per quasi ogni $y \in \mathbb{Y}$, $f_y(x) = f(x, y)$ è μ-integrabile*
3. *$x \mapsto \int_{\mathbb{Y}} f_x(y) \, \mathrm{d}\nu(y)$ è μ-integrabile*
4. *$y \mapsto \int_{\mathbb{X}} f_y(x) \, \mathrm{d}\mu(x)$ è ν-integrabile*
5. *valgono le formule di riduzione:*

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{X}\times\mathbb{Y}} f(x,y) \, \mathrm{d}(\mu \times \nu)(x,y) &= \int_{\mathbb{X}} \left(\int_{\mathbb{Y}} f_x(y) \, \mathrm{d}\nu(y) \right) \mathrm{d}\mu(x) \\ &= \int_{\mathbb{Y}} \left(\int_{\mathbb{X}} f_y(x) \, \mathrm{d}\mu(x) \right) \mathrm{d}\nu(y) \end{aligned}$$

Dimostrazione. Si dimostrano i punti 1, 3, e la prima parte di 5, perchè i ruoli di $\mathbb{X}$ ed $\mathbb{Y}$ sono scambiabili.
Sia $f = \chi_E$ con $\mu \times \nu(E) < +\infty$; allora per la proposizione precedente $f_x(y) = \chi_E(x, y) = \chi_{E_x}(y)$, i punti 1 e 3 valgono e si ha:

$$\int_{\mathbb{X}} \left(\int_{\mathbb{Y}} \chi_{E_x}(y) \, \mathrm{d}\nu(y) \right) \mathrm{d}\mu(x) = \int_{\mathbb{X}} \nu(E_x) \, \mathrm{d}\mu(x) = \mu \times \nu(E) = \int_{\mathbb{X}\times\mathbb{Y}} f \, \mathrm{d}(\mu \times \nu)$$

A questo punto per additività finita il risultato vale se

$$f = \sum_{i=1}^{I} a_i \chi_{E_i} \quad \text{con } \mu \times \nu(E_i) < +\infty \ \ \forall i$$

ovvero vale per funzioni semplici integrabili.
Sia $f \geq 0$ integrabile, allora esiste $\{\varphi_k\}$ successione crescente di funzioni semplici integrabili (perché maggiorate da f) tali che $\varphi_k \to f$ ovunque, dunque per il teorema della convergenza monotona applicato ad $\mathbb{X}$, $\mathbb{Y}$ ed $\mathbb{X} \times \mathbb{Y}$ si ha la tesi.
Sia ora f integrabile qualunque, allora $f = f^+ - f^-$ $f^+, f^- \geq 0$ sono integrabili, pertanto la tesi vale anche per f. □

Per applicare questo teorema bisogna però sapere in partenza che l'integrale sullo spazio prodotto sia finito. Quando questa condizione non è nota si può applicare la seguente variante, che richiede però un'ipotesi in più su $\mathbb{X}$ e $\mathbb{Y}$.

Teorema 6.9. (Teorema di Tonelli)
Siano $(\mathbb{X}, \mathscr{A}, \mu)$ *e* $(\mathbb{Y}, \mathscr{B}, \nu)$ *due spazi con misura completi e* σ-finiti. *Sia* f *una funzione non negativa e misurabile su* $\mathbb{X} \times \mathbb{Y}$*; allora:*

1. *per quasi ogni* $x \in \mathbb{X}$, $f_x(y) = f(x, y)$ *è* ν*-misurabile*
2. *per quasi ogni* $y \in \mathbb{Y}$, $f_y(x) = f(x, y)$ *è* μ*-misurabile*
3. $x \mapsto \displaystyle\int_{\mathbb{Y}} f_x(y)\,\mathrm{d}\nu(y)$ *è* μ*-misurabile*
4. $y \mapsto \displaystyle\int_{\mathbb{X}} f_y(x)\,\mathrm{d}\mu(x)$ *è* ν*-misurabile*
5. *valgono le formule di riduzione:*

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{X}\times\mathbb{Y}} f(x, y)\,\mathrm{d}(\mu \times \nu)(x, y) &= \int_{\mathbb{X}} \left(\int_{\mathbb{Y}} f_x(y)\,\mathrm{d}\nu(y) \right) \mathrm{d}\mu(x) \\ &= \int_{\mathbb{Y}} \left(\int_{\mathbb{X}} f_y(x)\,\mathrm{d}\mu(x) \right) \mathrm{d}\nu(y) \end{aligned}$$

Dimostrazione. Si sa che esiste $\{\varphi_k\}$ successione crescente di funzioni semplici tale che $\varphi_k \to f$ ovunque. Per la σ-finitezza di $\mathbb{X}$ e di $\mathbb{Y}$ esistono successioni crescenti $\{X_k\}$, $\{Y_k\}$ di insiemi rispettivamente μ-misurabili e ν-misurabili tali che

$$\mathbb{X} = \bigcup_k X_k, \quad \mathbb{Y} = \bigcup_k Y_k, \qquad \mu(X_k) < +\infty, \ \nu(Y_k) < +\infty \ \ \forall k$$

Si pone $\psi_k(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} \varphi_k(x, y)\chi_{X_k \times Y_k}(x, y)$, che è prodotto di funzioni semplici, dunque è semplice, ed inoltre è integrabile, perché nulla al di fuori di un insieme di misura finita, e la convergenza rimane comunque garantita, ovvero $\psi_k \to f$ ovunque ed in modo crescente, quindi alle funzioni ψ_k si può applicare il teorema di Fubini, ed i risultati si ottengono passando al limite per convergenza monotona. □

Proposizione 6.10. *Sia* $(\mathbb{X}, \mathscr{A}, \mu)$ *uno spazio con misura completo; sia* λ *la misura di Lebesgue su* $\mathbb{R}$. *Sia* $f \geq 0$ *integrabile su* $\mathbb{X}$. *Allora, posto*

$$\mu_f(t) \stackrel{\text{def}}{=} \mu\big(\{f > t\}\big)$$

"funzione di distribuzione di f*", si ha che:*

1. *l'insieme* $E = \{(x, t) \in \mathbb{X} \times \mathbb{R} \,:\, 0 < t < f(x)\}$ *è misurabile su* $\mathbb{X} \times \mathbb{R}$
2. $\mu \times \lambda(E) = \displaystyle\int_{\mathbb{X}} f\,\mathrm{d}\mu$
3. $\displaystyle\int_{\mathbb{X}} f\,\mathrm{d}\mu = \int_0^{+\infty} \mu_f(t)\,\mathrm{d}t$
(questo è un integrale improprio, perché $\mu_f(t)$ *è non negativa e monotona decrescente, dunque esiste l'integrale di Riemann su ogni intervallo* $[0, k]$ *con* $k > 0$*)*

Dimostrazione. Sia f semplice in rappresentazione canonica $f = \sum_{i=1}^{I} a_i \chi_{F_i}$, allora in questo caso

$$E = \bigcup_{i=1}^{I} F_i \times (0, a_i)$$

dunque E è misurabile, perché $E \in \mathscr{R}_\sigma$, dal momento che ognuno degli $F_i \times (0, a_i)$ è un rettangolo misurabile.
Se f è misurabile non negativa, $f = \sup \varphi_k$, dove $\{\varphi_k\}$ è una successione crescente di funzioni semplici; se $E_k = \{(x,t) \in \mathbb{X} \times \mathbb{R} : 0 < t < \varphi_k(x)\}$, allora $E_k \subseteq E$ ed $E = \bigcup E_k \in \mathscr{R}_\sigma$, dunque E è misurabile.
Sia $f \geq 0$ integrabile; posto $\tilde{\mathbb{X}} = \{x \in \mathbb{X} : f(x) > 0\}$, allora $\tilde{X}$ è σ-finito, $E \subseteq \tilde{\mathbb{X}} \times \mathbb{R}$, dunque si può sostituire $\mathbb{X}$ con $\tilde{\mathbb{X}}$ e procedere supponendo $\mathbb{X}$ σ-finito. $\mathbb{R}$ è σ-finito, dunque $\mathbb{X} \times \mathbb{R}$ è σ-finito. Se quindi $f \geq 0$ è integrabile, allora $F(x,t) = \chi_E(x,t) \geq 0$ è misurabile non negativa su $\mathbb{X} \times \mathbb{R}$, dunque ad essa si può applicare il teorema di Tonelli:

$$\begin{aligned} \mu \times \lambda(E) &= \int_{\mathbb{X}\times\mathbb{R}} F \,\mathrm{d}(\mu \times \lambda) = \int_{\mathbb{X}} \left[\int_{\mathbb{R}} \chi_E(x,t) \,\mathrm{d}\lambda(t) \right] \mathrm{d}\mu(x) = \\ &= \int_{\mathbb{X}} \left[\int_{\mathbb{R}} \chi_{E_x}(t) \,\mathrm{d}\lambda(t) \right] \mathrm{d}\mu(x) = \int_{\mathbb{X}} f(x) \,\mathrm{d}\mu(x) \end{aligned}$$

Inoltre, attraverso l'altra formula di riduzione:

$$\int_{\mathbb{X}\times\mathbb{R}} F \,\mathrm{d}(\mu \times \lambda) = \int_{\mathbb{R}} \left[\int_{\mathbb{X}} \chi_{E_t}(x) \,\mathrm{d}\mu(x) \right] \mathrm{d}\lambda(t)$$

Se $t > 0$, si ha che $E_t = \{x \in \mathbb{X} : f > t\}$ e quindi

$$\int_{\mathbb{X}} \chi_{E_t}(x) \,\mathrm{d}\mu(x) = \mu(E_t) = \mu_f(t)$$

Se $t \leq 0$, $E_t = \emptyset$ dunque

$$\int_{\mathbb{X}} \chi_{E_t}(x) \,\mathrm{d}\mu(x) = 0$$

Quindi in definitiva:

$$\int_{\mathbb{X}} f(x) \,\mathrm{d}\mu(x) = \mu \times \lambda(E) = \int_{[0,+\infty)} \mu_f(t) \,\mathrm{d}\lambda(t) = \int_0^{+\infty} \mu_f(t) \,\mathrm{d}t$$

e l'ultima uguaglianza segue perché la funzione μ_f è monotona descrescente.
Dunque ogni integrale astratto può essere ricondotto al calcolo di un integrale improprio, conoscendo la misura degli insiemi di livello della funzione considerata. $\square$

6.2 Misure prodotto su $\mathbb{R}^n$

Ci si chiede se su $\mathbb{R}^n$ si abbiano più misure, quella prodotto e quella di Lebesgue; in realtà esse sono la medesima.
Per ogni n sia $(\mathbb{R}^n, \mathscr{L}^n, \mu_n)$ lo spazio $\mathbb{R}^n$ con la misura di Lebesgue. Si considera $\mathbb{R}^{n+m} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$: si ha che $\mathscr{L}^n \times \mathscr{L}^m$ (la σ-algebra prodotto) coincide con $\mathscr{L}^{n+m}$ e che $\mu_n \times \mu_m = \mu_{n+m} \quad \forall n, m$.

Quanto segue è una traccia della dimostrazione.

1) Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$ tale che $\mu_n^*(A) = 0$; sia $I \subseteq \mathbb{R}^m$ un intervallo limitato; allora $A \times I \in \mathscr{L}^{n+m}$ e $\mu_{n+m}(A \times I) = 0$.

2) Se $A \subseteq \mathbb{R}^n$ e $\mu_n^*(A) = 0$, allora $A \times \mathbb{R}^m \in \mathscr{L}^{n+m}$ e $\mu_{n+m}(A \times \mathbb{R}^m) = 0$.

3) Se $\mathscr{R}$ è la famiglia dei rettangoli misurabili di $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ ed $\mathfrak{I}$ è la famiglia degli intervalli di $\mathbb{R}^{n+m} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, allora vale:

$$\mathfrak{I} \subseteq \mathscr{R} \subseteq \mathscr{L}^{n+m}$$

4) Se $R = A \times B$ è un rettangolo misurabile, allora $\mu_{n+m}(R) = \mu_n(A)\mu_m(B)$.

5) Se μ_{n+m}^* è la misura esterna di Lebesgue su $\mathbb{R}^{n+m}$ e $\mu_{\mathscr{R}}^*$ è la misura esterna definita a partire da $\mathscr{R}$ e $\mu_{\mathscr{L}^{n+m}}^*$ è la misura esterna indotta da μ_{n+m} come misura sull'algebra $\mathscr{L}^{n+m}$ (che coincide con μ_{n+m}^*), si ha che vale:

$$\mu_{\mathscr{L}^{n+m}}^* \leq \mu_{\mathscr{R}}^* \leq \mu_{n+m}^* = \mu_{\mathscr{L}^{n+m}}^*$$

e quindi si ha anche che $\mathscr{L}^n \times \mathscr{L}^m = \mathscr{L}^{n+m}$ e $\mu_n \times \mu_m = \mu_{n+m}$.

Capitolo 7

Gli spazi L^p

In questo capitolo si affronterà una breve introduzione agli spazi funzionali L^p delle funzioni integrabili alla potenza p. Conviene preliminarmente richiamare alcune disuguaglianze.

7.1 Disuguaglianze fondamentali

Teorema 7.1. (Disuguaglianza di Young)
Siano $a, b \geq 0$ e sia $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che $0 < \lambda < 1$. Allora vale la seguente disuguaglianza

$$a^{\lambda} b^{1-\lambda} \leq \lambda a + (1-\lambda) b$$

Inoltre vale l'uguaglianza solo se $a = b$.

Dimostrazione. Consideriamo la funzione

$$f(t) \stackrel{\text{def}}{=} \lambda t + (1-\lambda) - t^{\lambda}, \quad t > 0$$

e la sua derivata

$$f'(t) = \lambda - \lambda(t^{\lambda-1}) = \lambda(1 - t^{\lambda-1})$$

Dunque $f'(t) = 0$ se e solo se $t = 1$ ed inoltre

$$f'(t) > 0, \quad \text{per } t > 1$$

$$f'(t) < 0, \quad \text{per } t < 1$$

Quindi $f(t)$ ha un minimo in $t = 1$ ed in particolare vale $f(1) = 0$. Allora $\forall t \neq 1$ si ha che $f(t) > 0$.
Ritorniamo ora alla disuguaglianza di Young. Si deve dimostrare che

$$\lambda a + (1-\lambda) b \geq a^{\lambda} b^{(1-\lambda)}$$

$$\lambda a + (1-\lambda) b \; - a^{\lambda} b^{(1-\lambda)} \geq 0$$

In particolare si ha, se $b > 0$, (se $b = 0$ la disugaglianza è ovvia)

$$\lambda a + (1-\lambda) b \; - a^{\lambda} b^{(1-\lambda)} = b \left[\lambda \left(\frac{a}{b} \right) + (1-\lambda) - \left(\frac{a}{b} \right)^{\lambda} \right]$$

Sia dunque $t \overset{\text{def}}{=} \dfrac{a}{b}$, si ottiene

$$b\left[\lambda\left(\frac{a}{b}\right)+(1-\lambda)-\left(\frac{a}{b}\right)^{\lambda}\right]=b\left[\lambda t+(1-\lambda)t-t^{\lambda}\right]=bf(t)$$

Dunque, per le considerazioni fatte precedentemente, $\forall t \neq 1$ si ha $bf(t) > 0$ e, di conseguenza, la disuguaglianza è dimostrata. Inoltre, sappiamo che $f(t) = 0$ solo se $t = 1$; si ha l'uguaglianza quindi se e solo se $a = b$. $\square$

Teorema 7.2. (Versione alternativa della disuguaglianza di Young)
Si considerino due numeri reali p e q tali che $p > 1$, $q > 1$ e $1/p + 1/q = 1$. Allora, per ogni $a, b \in \mathbb{R}$, con $a \geq 0$ e $b \geq 0$ vale la seguente disuguaglianza

$$ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q$$

Dimostrazione. Si definisce $\lambda \overset{\text{def}}{=} 1/p$ da cui $1/q = (\lambda - 1)$. Inoltre, si definisce

$$A \overset{\text{def}}{=} a^{\frac{1}{\lambda}} \qquad B \overset{\text{def}}{=} b^{\frac{1}{1-\lambda}}$$

Per la disuguaglianza di Young si ha che

$$A^{\lambda}B^{(1-\lambda)} \leq \lambda A + (1-\lambda)B$$

da cui sostituendo

$$ab \leq \lambda a^{\frac{1}{\lambda}} + (1-\lambda)b^{\frac{1}{1-\lambda}}$$
$$ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q$$

$\square$

Definizione 7.1. *Sia $p \in [1, +\infty]$, presa f misurabile su $(\mathbb{X}, \mathscr{A}, \mu)$, si pone:*

$$\|f\|_p = \left(\int_{\mathbb{X}} |f|^p \, \mathrm{d}\mu\right)^{1/p}$$

(l'integrale ha sicuramente senso, solo che può essere infinito)

Definizione 7.2. *Sia f una funzione $f : \mathbb{X} \longrightarrow [-\infty, +\infty]$. Allora si dice "estremo superiore essenziale" di f e si scrive* $\operatorname{supess}_{\mathbb{X}}(f)$ *il numero*

$$\operatorname{supess}_{\mathbb{X}} f = \inf\{t \in [-\infty, +\infty] \, : \, f(x) < t \textit{ quasi ovunque}\}$$

(se si modifica f su un insieme di misura nulla, il suo sup essenziale non cambia, come il suo integrale)
Si dice inoltre "estremo inferiore essenziale" il numero:

$$\operatorname{infess}_{\mathbb{X}} f = \sup\{t \in [-\infty, +\infty] \, : \, f(x) > t \textit{ quasi ovunque}\}$$

Definizione 7.3. *Sia f una funzione misurabile su $(\mathbb{X}, \mathscr{A}, \mu)$; allora si pone:*

$$\|f\|_{\infty} = \operatorname{supess}_{\mathbb{X}} |f|$$

Teorema 7.3. (Disuguaglianza di Hölder)
Siano p e q due numeri reali tali che $p > 1$, $q > 1$ e ${}^1/p + {}^1/q = 1$. Sia inoltre $(\mathbb{X}, \mathscr{A}, \mu)$ uno spazio di misura e siano f e g due funzioni misurabili su tale spazio. Allora vale la seguente disuguaglianza

$$\int_{\mathbb{X}} |f(x)g(x)| \, \mathrm{d}\mu(x) \leq \|f\|_p \, \|g\|_q$$

Inoltre, vale l'uguaglianza se e solo se $|f|^p = c\,|g|^q$, per qualche costante $c \in \mathbb{R}$.

Dimostrazione. Siano $1 < p$, $q < +\infty$; si ha che $|fg| = t\,|f| \cdot \dfrac{|g|}{t}$ $\forall t > 0$.
Sia $\tilde{A} = t\,|f|$ e $\tilde{B} = \dfrac{|g|}{t}$, allora si ha:

$$|fg| = t\,|f| \cdot \frac{|g|}{t} \leq \frac{1}{p}\,(t^p\,|f|^p) + \frac{1}{q}\,\left(t^{-q}\,|g|^q\right)$$

e questo vale $\forall x \in \mathbb{X}$ e $\forall t > 0$; allora:

$$\int |fg| \leq \frac{1}{p}\left(t^p\,\|f\|_p^p\right) + \frac{1}{q}\left(t^{-q}\,\|g\|_q^q\right) = \frac{1}{p}A^p + \frac{1}{q}B^q$$

dove $A = t\,\|f\|_p$ e $B = t^{-1}\,\|g\|_q$; si sceglie t dimodochè $A^p = B^q$:

$$t^p\,\|f\|_p^p = t^{-q}\,\|g\|_q^q \quad \Rightarrow \quad t^{p+q} = \frac{\|g\|_q^q}{\|f\|_p^p}$$

(ciò si ha nel caso in cui $\|f\|_p^p$ e $\|g\|_q^q$ siano quantità finite e non nulle; per questi casi estremi, però, la disuguaglianza è verificata) per questa scelta di t si ha:

$$\int |fg| \leq AB = \|f\|_p\,\|g\|_q$$

Se $p = 1$, $q = +\infty$, allora $|fg| \leq |f| \operatorname{supess}_{\mathbb{X}} |g|$ quasi ovunque, quindi

$$\int |fg| \leq \left(\int |f|\right) \cdot \|g\|_\infty = \|f\|_1\,\|g\|_\infty$$

ed analogamente se $p = +\infty$, $q = 1$. □

Esercizio. *Presi $a, b \in \mathbb{R}$ provare che, $\forall p \geq 1$*

$$|a+b|^p \leq 2^{p-1}\,(|a|^p + |b|^p) \tag{7.1}$$

Osservazione. *La disuguaglianza 7.1 ci dice che se prendiamo f, g tali che $\|f\|_p, \|g\|_p < \infty$ allora anche $\|f+g\|_p < \infty$. Ciò suggerisce che si possa dare la struttura di spazio lineare normato alla classe di funzioni f con $\|f\|_p < \infty$. Cerchiamo di vedere se la funzione*

$$\|\cdot\|_p : f \to \|f\|_p$$

ha la struttura di una norma. Il seguente teorema prova che $\|\cdot\|_p$ verifica la disuguaglianza triangolare.

Teorema 7.4. (Disuguaglianza di Minkowsky)
$\forall p \in [1, +\infty]$, prese f, g misurabili su $(\mathbb{X}, \mathscr{A}, \mu)$ vale che:

$$\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$$

Dimostrazione. Usando la disuguaglianza triangolare $|f+g| \leq |f|+|g|$ si ricava:
se $p = 1$, $\displaystyle\int |f+g| \leq \int |f| + \int |g| \quad (|f+g| \leq |f| + |g|)$,
se $p = +\infty$, $\operatorname{supess}|f+g| \leq \operatorname{supess}|f| + \operatorname{supess}|g|$.
Sia $1 < p < +\infty$, allora si ha che:

$$\|f+g\|_p^p = \int |f+g|^p = \int |f+g|^{p-1} |f+g| \leq$$
$$\leq \left(\int |f+g|^{p-1} |f|\right) + \left(\int |f+g|^{p-1} |g|\right)$$

(per la disuguaglianza triangolare); in particolare si ha:

$$\int |f+g|^{p-1} |f| \leq \left\|(f+g)^{p-1}\right\|_q \|f\|_p$$

per la disuguaglianza di Hölder, dove $q = \frac{p}{p-1}$

$$\int |f+g|^{p-1} |f| \leq \left(\int |f+g|^p\right)^{\frac{p-1}{p}} \cdot \|f\|_p = \|f+g\|_p^{p-1} \cdot \|f\|_p$$

Quindi si ha che:

$$\|f+g\|_p^p \leq \|f+g\|_p^{p-1} \|f\|_p + \|f+g\|_p^{p-1} \cdot \|g\|_p$$
$$\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$$

nei casi in cui $\|f+g\|_p^{p-1}$ è diverso da zero o da $+\infty$, nei quali casi la disuguaglianza vale, infatti se $+\infty = \displaystyle\int |f+g|^p \leq \int (|f|+|g|)^p$, ricordando che

$$(a+b)^p \leq C\,(a^p + b^p) \quad \text{dove } C = 2^{p-1}$$

si ottiene che

$$+\infty \leq C \int |f|^p + C \int |g|^p$$

dunque uno dei due tra $\displaystyle\int |f|^p$ e $\displaystyle\int |g|^p$ è infinito. □

Osservazione. *Preso $1 < p < \infty$, nella disuguaglianza di Minkowsky vale l'uguaglianza se e solo se esistono $\alpha, \beta > 0$ tali che $\alpha f = \beta g$.*

Osservazione. *Affinché si abbia che $\|\cdot\|_p$ sia una norma dovremmo avere che se $\|f\|_p = 0$ allora $f \equiv 0$. Ciò però non è vero perché risulta solo che $f = 0$ q.o. Per ovviare a questo problema preocediamo come segue, identifichiamo tutte le funzioni che differiscono da f su un insieme di misura nulla.*

Definizione 7.4. *Prese f e g misurabili su $(\mathbb{X}, \mathscr{A}, \mu)$ si dice che $f \sim g$ se e solo se $f = g$ quasi ovunque; $\sim$ è una relazione di equivalenza e presa f misurabile su $(\mathbb{X}, \mathscr{A}, \mu)$ si indica con $[f]$ la sua classe di equivalenza.*

Osservazione. *Se $f = g$ quasi ovunque, allora $\|f\|_p = \|g\|_p \quad \forall p \in [1, +\infty]$, e quindi si può porre $\|[f]\|_p \stackrel{\text{def}}{=} \|f\|_p$.*

Definizione 7.5. (Spazio $\mathscr{L}^p$) *Introduciamo lo spazio vettoriale*

$$\mathscr{L}^p(\mathbb{X}, \mathscr{A}, \mu) \stackrel{\text{def}}{=} \big\{[f] \,:\, f \text{ misurabile su } (\mathbb{X}, \mathscr{A}, \mu) \text{ con } \|f\|_p < +\infty\big\}$$

Proposizione 7.5. $\left(\mathscr{L}^p(\mathbb{X}, \mathscr{A}, \mu), \|\cdot\|_p\right)$ *è uno spazio vettoriale normato.*

Dimostrazione. 1) Sia $\|[f]\|_p = 0$, allora $f = 0$ quasi ovunque, pertanto $0 \in [f]$, quindi $[f] = [0]$.

2) $\forall \lambda > 0$, $\|[\lambda f]\|_p = \lambda \|[f]\|_p$

3) la disuguaglianza triangolare per $\|\cdot\|$ è stata dimostrata nel Teorema 7.4. □

D'ora in poi si ometteranno le parentesi quadre nell'indicare gli elementi degli spazi L^p, tenendo presente che una funzione nel senso di L^p è in effetti una classe di equivalenza.

Proposizione 7.6. (Disuguaglianza di Chebishev)
Sia $p < +\infty$, sia $f \in \mathscr{L}^p$; posto $\mu(t) = \mu\big(\{|f| > t\}\big)$ vale:

$$\mu(t) \leq \frac{1}{t^p} \|f\|_p^p$$

Dimostrazione. Per la disuguaglianza di Chebishev:

$$\mu\big(\{|f|^p > t^p\}\big) \leq \frac{1}{t^p} \int_{\mathbb{X}} |f|^p$$

Allora

$$\mu\big(\{|f| > t\}\big) = \mu\big(\{|f|^p > t^p\}\big) \leq \frac{1}{t^p} \|f\|_p^p$$

□

Proposizione 7.7. *Sia $p < +\infty$, sia $f \in \mathscr{L}^p$ e sia $\{f_n\} \subseteq \mathscr{L}^p$ tali che $\|f_n - f\|_p \to 0$; allora $f_n \to f$ in misura.*

Dimostrazione. $\forall \epsilon > 0$, $\mu\big(\{|f_n - f| > \epsilon\}\big) \leq \frac{1}{\epsilon^p} \|f_n - f\|_p^p \to 0$ per $n \to +\infty$. □

Osservazione. *Le funzioni $f \in \mathscr{L}^p$ sono quasi ovunque finite dunque se $\{f_n\}$ converge nel senso di L^p, allora a meno di selezionare una sottosuccessione si ha convergenza quasi uniforme, e dunque quasi ovunque.*

Teorema 7.8. (Teorema di Riesz-Fisher)
Sia $1 \leq p \leq +\infty$; allora $\mathscr{L}^p(\mathbb{X}, \mathscr{A}, \mu)$ è completo.

Dimostrazione. Sia $p < +\infty$, sia $\{f_n\} \subseteq \mathscr{L}^p$ di Cauchy. Allora

$$\mu\big(\{|f_n - f_m| > \epsilon\}\big) \leq \frac{1}{\epsilon^p} \|f_n - f_m\|_p^p \to 0$$

per $n, m \to +\infty$, pertanto $\{f_n\}$ è di Cauchy in misura. Allora esiste una sottosuccessione $\{f_{n_k}\}$ ed una funzione misurabile f tali che $f_{n_k} \to f$ quasi uniformemente. Dal momento che la successione è di Cauchy

$$\forall \epsilon > 0\ \exists N: \quad \text{se}\, n, m > N \text{ allora } \|f_n - f_m\|_p^p < \epsilon$$

Allora, poiché $n_k \geq k$, se $k \geq N$ ed $n \geq N$, allora $n_k \geq N$ e dunque di ha:

$$\int |f_n - f_{n_k}|^p = |\ f_n - f_{n_k}\|_p^p < \epsilon \quad \forall n, k \geq N$$

D'altra parte, si ha che $|f_n - f_{n_k}|^p \to |f_n - f|^p$ quasi ovunque per $k \to +\infty$; allora per il lemma di Fatou

$$\int |f_n - f|^p \leq \liminf_{k \to +\infty} \int |f_n - f_{n_k}|^p \leq \epsilon \quad \forall n \geq N$$

ovvero $\lim\limits_{n \to +\infty} \|f_n - f\|_p^p = 0$, ovvero $f_n \to f$ in norma p. Dalla disuguaglianza data dal lemma di Fatou si ha che $\|f\|_p < +\infty$ perché se $n \geq N$:

$$\|f\|_p \leq \|f - f_n\|_p + \|f_n\|_p \leq \epsilon^{1/p} + \|f_n\|_p < +\infty$$

Sia $p = +\infty$; si fissano $n, m \in \mathbb{N}$, e si ha $\|f_n - f_m\|_\infty = \operatorname{supess}_{\mathbb{X}} |f_n - f_m|$. Allora esiste $E_{n,m} \in \mathscr{A}$ tale che $\mu(E_{n,m}) = 0$ e

$$\|f_n - f_m\|_\infty = \sup_{\mathbb{X} \setminus E_{n,m}} |f_n - f_m|$$

Sia $E = \bigcup\limits_{n,m} E_{n,m} \in \mathscr{A}$. Allora $\mu(E) = 0$ perché E è unione numerabile di insiemi di misura nulla. Quindi posto $\mathbb{Y} = \mathbb{X} \setminus E$, si ha che $\{f_n\}$ è di Cauchy nel senso della convergenza uniforme su $\mathbb{Y}$, ovvero $\sup\limits_{\mathbb{Y}} |f_n - f_m| \to 0$ per $n, m \to 0$, quindi $\exists f = \lim\limits_{n \to +\infty} f_n$ nel senso della convergenza uniforme su $\mathbb{Y}$; si estende f a 0 su E, ed in questo modo $\|f_n - f\|_\infty \to 0$ per $n \to +\infty$. □

7.2 Caratterizzazione duale della norma

Ci si chiede se sia possibile valutare la norma di una funzione tramite espressioni lineari della funzione stessa.

Proposizione 7.9. (Caratterizzazione duale della norma)
Sia $1 \leq p < +\infty$ e sia $f \in \mathscr{L}^p$; allora

$$\|f\|_p = \max\left\{\int_{\mathbb{X}} fg \ :\ \|g\|_q = 1\right\}$$

con p e q coniugati.

Dimostrazione. Si ha che $\int_{\mathbb{X}} |fg| \leq \|f\|_p \|g\|_q$ con l'uguaglianza se e solo se $|g|^q = c \cdot |f|^p$, con $c > 0$; inoltre

$$\int_{\mathbb{X}} fg \leq \int_{\mathbb{X}} |fg| \leq \|f\|_p \|g\|_q$$

Si ha che $\int_{\mathbb{X}} fg = \int_{\mathbb{X}} |fg|$ se e solo se $fg = |fg|$ quasi ovunque, il che si ha se e solo se il segno di f è quasi ovunque uguale al segno di g; se vale questo e quasi ovunque $|g|^q = c \cdot |f|^p$, allora $\int_{\mathbb{X}} fg = \|f\|_p \|g\|_q$.
Pertanto, se $\operatorname{sign} f = \operatorname{sign} g$ e $|g|^q = c \cdot |f|^p$, allora

$$g = \operatorname{sign} g \cdot |g| = \operatorname{sign} f \cdot c \cdot |f|^{p/q}$$

Si ha che $q = \dfrac{p}{p-1}$, quindi $\dfrac{p}{q} = p - 1$; in questo modo:

$$g = c \cdot \operatorname{sign} f \cdot |f|^{p-1}, \qquad \text{per qualche } c > 0$$

(in questi ragionamenti si è supposto $p > 1$; in ogni caso, per $p = 1$ vale la stessa uguaglianza per g)
Per la disuguaglianza di Hölder, $\int_{\mathbb{X}} fg \leq \|f\|_p \|g\|_q = \|f\|_p$, dunque si ha che

$$\sup \left\{ \int_{\mathbb{X}} fg \,:\, \|g\|_q = 1 \right\} \leq \|f\|_p$$

Per avere l'uguaglianza bisogna trovare $g \in \mathscr{L}^q \,:\, \|g\|_q = 1$ per cui valga che $\int_{\mathbb{X}} fg = \|f\|_p$ (e da ciò segue la tesi). Per le considerazioni fatte precedentemente, g è data da $c \cdot \operatorname{sign} f \cdot |f|^{p-1}$ con $c > 0$ tale che

$$1 = \|g\|_q = \left(\int_{\mathbb{X}} c^q |f|^p \right)^{1/q} = c \cdot \left(\int_{\mathbb{X}} |f|^p \right)^{1/q}$$

$$c = \frac{1}{\|f\|_p^{p/q}}$$

$\square$

Osservazione. $\mathscr{L}^p \ni f \mapsto \int_{\mathbb{X}} fg \in \mathbb{R}$ *è un funzionale lineare che è limitato, perché*

$$\left| \int_{\mathbb{X}} fg \right| \leq \|f\|_p \|g\|_q = \|f\|_p < +\infty$$

Questa applicazione F_g, dunque, appartiene allo spazio duale $(L^p)^*$.

Questa proposizione ha due limitazioni: p deve essere finito, ed $\|f\|_p$ deve essere conosciuto in partenza come finito.

Definizione 7.6. *Si dice che lo spazio con misura $(\mathbb{X}, \mathscr{A}, \mu)$ ha la proprietà del sottoinsieme finito se e solo se*

$$\forall E \in \mathscr{A} \,:\, \mu(E) = \infty,\ \exists F \in \mathscr{A} \text{ tale che } F \subseteq E \text{ e } 0 < \mu(F) < +\infty$$

Osservazione. *Questa proprietà è molto debole, ed è implicata dalla σ-finitezza.*

Proposizione 7.10. *Sia $(\mathbb{X}, \mathscr{A}, \mu)$ con la proprietà del sottoinsieme finito; allora per ogni f misurabile su $(\mathbb{X}, \mathscr{A}, \mu)$ si ha che:*

$$\|f\|_\infty = \sup\left\{\int_{\mathbb{X}} fg \,:\, g \in \mathscr{L}^1,\ \|g\|_1 = 1\right\}$$

Dimostrazione. Sr $f \equiv 0$ la tesi è verificata. Sia dunque f non nulla su un insieme di misura positiva, si prova che $\forall k > 0$ tale che $k < \|f\|_\infty$ allora esiste $g \in \mathscr{L}^1,\ \|g\|_1 = 1$ tale che $k \leq \int_{\mathbb{X}} fg$ (questa è l'unica disuguaglianza da dimostrare, perché l'altro verso è sempre garantito dalla disuguaglianza di Hölder)
Sia $E = \{|f| > k\}$; poiché $k < \|f\|_\infty$ allora $\mu(E) > 0$.
Se $\mu(E) < +\infty$, si considera $g = \dfrac{1}{\mu(E)} \mathcal{X}_E \cdot \operatorname{sign} f$:

$$\int_{\mathbb{X}} fg = \int_{\mathbb{X}} \frac{1}{\mu(E)} |f| \cdot \mathcal{X}_E \geq \int_E \frac{k}{\mu(E)} = k$$

$$\|g\|_1 = \int_{\mathbb{X}} |g| = \int_{\mathbb{X}} \frac{1}{\mu(E)} \mathcal{X}_E = 1$$

Se invece $\mu(E) = +\infty$ allora esiste $F \in \mathscr{A} \,:\, F \subseteq E$ con $0 < \mu(F) < +\infty$; si sceglie $g = \dfrac{1}{\mu(F)} \mathcal{X}_F \cdot \operatorname{sign} f$ ed in questo modo si ha che, in modo analogo a quanto fatto precedentemente, $\|g\|_1 = 1$ e $\int_{\mathbb{X}} fg \geq k$. □

Proposizione 7.11. *Sia $1 \leq p \leq +\infty$ e sia $(\mathbb{X}, \mathscr{A}, \mu)$ uno spazio con misura σ-finito; allora per ogni f misurabile su $(\mathbb{X}, \mathscr{A}, \mu)$ vale che:*

$$\|f\|_p = \sup\left\{\int_{\mathbb{X}} fg \,:\, \|g\|_q = 1\right\}$$

In questo modo si ha un mezzo per decidere se $\|f\|_p$ sia finito, dunque si ha un criterio per stabilire se f stia o meno in $\mathscr{L}^p$.

Dimostrazione. Per esercizio. □

Proposizione 7.12. (Disuguaglianza di Minkowsky integrale)
Siano $(\mathbb{X}, \mathscr{A}, \mu)$ e $(\mathbb{Y}, \mathscr{B}, \nu)$ due spazi con misura σ-finiti e completi; sia f misurabile su $\mathbb{X} \times \mathbb{Y}$; allora

$$\left\| \int_{\mathbb{Y}} f(\cdot, y) \,\mathrm{d}\nu(y) \right\|_{\mathscr{L}^p(\mathbb{X})} \leq \int_{\mathbb{Y}} \|f(\cdot, y)\|_{\mathscr{L}^p(\mathbb{X})} \,\mathrm{d}\nu(y)$$

Dimostrazione. Poiché entrambi $\mathbb{X}$ ed $\mathbb{Y}$ sono σ-finiti, anche $\mathbb{X} \times \mathbb{Y}$ è σ-finito, quindi per la proposizione precedente:

$$\left\| \int_{\mathbb{Y}} f(\cdot, y) \,\mathrm{d}\nu(y) \right\|_{\mathscr{L}^p} = \sup\left\{\int_{\mathbb{X}} \left(\int_{\mathbb{Y}} f(x, y) \,\mathrm{d}\nu(y)\right) g(x) \,\mathrm{d}\mu(x) \,:\, \|g\|_{\mathscr{L}^q} = 1\right\}$$

g è misurabile su $\mathbb{X}$, dunque lo è anche su $\mathbb{X} \times \mathbb{Y}$, considerandola come costante su ogni fibra sopra $\mathbb{X}$, pertanto anche $f(x,y)g(x)$ è misurabile su $\mathbb{X} \times \mathbb{Y}$. Per il teorema di Tonelli:

$$\int_{\mathbb{X}} \left(\int_{\mathbb{Y}} |f(x,y)g(x)| \, \mathrm{d}\nu(y) \right) \mathrm{d}\mu(x) = \int_{\mathbb{Y}} \left(\int_{\mathbb{X}} |f(x,y)g(x)| \, \mathrm{d}\mu(x) \right) \mathrm{d}\nu(y) \leq$$
$$\leq \int_{\mathbb{Y}} \|f(\cdot,y)\|_{\mathscr{L}^p} \|g\|_{\mathscr{L}^q} \, \mathrm{d}\nu(y) \leq \int_{\mathbb{Y}} \|f(\cdot,y)\|_{\mathscr{L}^p} \, \mathrm{d}\nu(y)$$

□

Proposizione 7.13. (Disuguaglianza di Minkowsky per serie)
Sia $\{f_n\}$ in $\mathscr{L}^p(\mathbb{X})$ tale che $\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_p < +\infty$; allora $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge in $\mathscr{L}^p$ e vale che:

$$\left\| \sum_{n=1}^{\infty} f_n \right\|_p \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_p$$

Dimostrazione. Sia $g_N = \sum_{n=1}^{N} f_n$; si prova che $\{g_N\}$ è di Cauchy.
Se $N < M$, allora:

$$\|g_M - g_N\|_p = \left\| \sum_{n=N+1}^{M} f_n \right\|_p \leq \sum_{n=N+1}^{M} \|f_n\|_p \to 0 \quad \text{per } N, M \to +\infty$$

Per la completezza di $\mathscr{L}^p$, $\{g_N\}$ è convergente in norma p, ovvero $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ è convergente. Si ha inoltre:

$$\left\| \sum_{n=1}^{\infty} f_n \right\|_p = \lim_{N \to +\infty} \left\| \sum_{n=1}^{N} f_n \right\|_p \leq \lim_{N \to +\infty} \sum_{n=1}^{N} \|f_n\|_p = \sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_p$$

dunque la tesi è dimostrata. □

Proposizione 7.14. *Sia $(\mathbb{X}, \mathscr{A}, \mu)$ uno spazio con misura finito. Se $p < r$, allora per ogni funzione f misurabile su $(\mathbb{X}, \mathscr{A}, \mu)$ si ha che:*

$$\frac{1}{\mu(\mathbb{X})^{1/p}} \|f\|_p \leq \frac{1}{\mu(\mathbb{X})^{1/r}} \|f\|_r$$

Dimostrazione.

$$\int_{\mathbb{X}} |f|^p = \int_{\mathbb{X}} \left(|f|^p \cdot 1\right) \leq \left(\int_{\mathbb{X}} |f|^{p\alpha} \right)^{1/\alpha} \cdot \mu(\mathbb{X})^{1/\alpha'}$$

con α ed α' coniugati. Si sceglie $\alpha = r/p > 1$, e dunque:

$$\alpha' = \frac{\alpha}{\alpha - 1} = \frac{r}{r-p}$$

Quindi si ha:

$$\int_{\mathbb{X}} |f|^p \leq \left(\int_{\mathbb{X}} |f|^r \right)^{p/r} \cdot \mu(\mathbb{X})^{\frac{r-p}{r}}$$

$$\|f\|_p \leq \|f\|_r \cdot \mu(\mathbb{X})^{\frac{r-p}{pr}}$$

Si ha che $\dfrac{r-p}{pr} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{r}$, quindi:

$$\|f\|_p \leq \mu(\mathbb{X})^{1/p} \cdot \frac{1}{\mu(\mathbb{X})^{1/r}} \cdot \|f\|_r$$

$\square$

Proposizione 7.15. *Sia $f \in \mathscr{L}^r$ per qualche $r < +\infty$. Allora si ha*

$$\lim_{p\to\infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty \ .$$

Dimostrazione. Senza perdere di generalità si può supporre $f \geq 0$. Supponiamo per il momento f semplice, in rappresentazione canonica:

$$f = \sum_{i=1}^{N} a_i \chi_{E_i}$$

con tutti gli a_i distinti e positivi. Gli E_i avranno misura finita per l'ipotesi $f \in \mathscr{L}^r$. A meno di riordinare i valori di f si può supporre $a_1 = \max f = \|f\|_\infty$. Si calcola

$$\|f\|_p = \left(\sum_{i=1}^{N} a_i^p \mu(E_i) \right)^{\frac{1}{p}} = a_1 \left(\mu(E_1)\right)^{\frac{1}{p}} \left(1 + \sum_{i=2}^{N} \left(\frac{a_i}{a_1} \right)^p \frac{\mu(E_i)}{\mu(E_1)} \right)^{\frac{1}{p}}$$

e da qui, dato che $a_i < a_1$ per gli indici $i \geq 2$ segue la tesi, nel caso di f semplice. Sia ora $f \geq 0$ qualunque. Sia $\{f_n\}$ una successione crescente di funzioni semplici che converge ovunque a f. Sia $K \geq 0$ qualunque tale che $K < \|f\|_\infty$, allora esiste n tale che $\|f_n\|_\infty > K$. Ora, per ogni p, $\|f\|_p \geq \|f_n\|_p$ e quindi

$$\liminf_{p\to\infty} \|f\|_p \geq \lim_{p\to\infty} \|f_n\|_p = \|f_n\|_\infty > K$$

da cui, per l'arbitrarietà di K, segue

$$\liminf_{p\to\infty} \|f\|_p \geq \|f\|_\infty \ .$$

Quindi la tesi resta dimostrata se $\|f\|_\infty = \infty$. Consideriamo il caso $\|f\|_\infty < \infty$. Sia $t > 0$ qualunque e poniamo

$$E_t = \{f > t\} \ , \ F_t = \{f \leq t\} \ .$$

Per Minkowski si ha

$$\|f\|_p \leq \|f\chi_{E_t}\|_p + \|f\chi_{F_t}\|_p \leq \|f\|_\infty \mu(E_t)^{\frac{1}{p}} + \left(t^{(p-r)} \int_{F_t} f^r \right)^{\frac{1}{p}}$$

e per la disuguaglianza di Chebishev si ha

$$\mu(E_t) \leq t^{-r}\|f\|_r^r \ ,$$

quindi

$$\|f\|_p \leq (\|f\|_\infty + t)\left(t^{-r}\|f\|_r^r\right)^{\frac{1}{p}}$$

ora

$$\left(t^{-r}\|f\|_r^r\right)^{\frac{1}{p}} \to 1$$

quando $p \to \infty$. Pertanto, per ogni $t > 0$

$$\limsup_{p\to\infty} \|f\|_p \leq (\|f\|_\infty + t)$$

e in conclusione

$$\limsup_{p\to\infty} \|f\|_p \leq \|f\|_\infty \leq \liminf_{p\to\infty} \|f\|_p \ .$$

□

7.3 Separabilità degli spazi $\mathscr{L}^p$

Proposizione 7.16. *Sia $p < +\infty$, allora la classe delle funzioni semplici nulle fuori da un insieme di misura finita è densa in $\mathscr{L}^p$.*

Dimostrazione. Sia $f \in \mathscr{L}^p$; allora $\exists\{f_n\}$ successione di funzioni semplici tali che $f_n \to f$ quasi ovunque ed $|f_n| \to |f|$ in modo crescente.

$$\|f_n\|_p^p = \int |f_n|^p \leq \int |f|^p$$

quindi $\|f_n\|_p^p < +\infty$, pertanto:

$$\mu\big(\{|f_n| > 0\}\big) < +\infty \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

e dunque queste funzioni semplici sono nulle al di fuori di un insieme di misura finita. Inoltre:

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad |f_n - f| \leq |f_n| + |f| \leq 2|f|$$

Allora $|f_n - f| \leq 2|f|$, quindi $|f_n - f|^p \leq 2^p|f|^p$, e $2^p|f|^p$ è integrabile.
$|f_n - f|^p \to 0$ quasi ovunque, dunque per il teorema di convergenza dominata:

$$\int |f_n - f|^p \to 0 \quad \text{per} \ \ n \to +\infty$$

Quindi si ha che:

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} : \ \ \|f_N - f\|_p < \epsilon$$

e da questo discende la densità delle funzioni semplici nulle fuori da un insieme di misura finita. □

Teorema 7.17. *Sia $p < +\infty$; allora $\mathscr{L}^p(\mathbb{R}^n)$ è separabile, ovvero esiste un suo sottoinsieme denso e numerabile.*

Dimostrazione. Sia $f \in \mathscr{L}^p(\mathbb{R}^n)$; allora per la proposizione precendente $\forall \epsilon > 0$, $\exists\, g$ semplice, $g \in \mathscr{L}^p(\mathbb{R}^n)$ tale che $\|f-g\|_p < \epsilon$. Sia $g = \sum_{i=1}^{I} a_i \chi_{E_i}$ in rappresentazione canonica, e sia $M > 0$ tale che:

$$a_i \leq M \quad \text{e} \quad \mu(E_i) \leq M \qquad \forall i \in \{1, \dots, I\}$$

Fissato $\delta > 0$, esistono $q_i \in \mathbb{Q}$ tali che $|a_i - q_i| < \delta$ ed esistono U_i, unioni finite di intervalli con vertici a coordinate razionali tali che $\mu\big(U_i \triangle E_i\big) < \delta$.

Si pone $h = \sum_{i=1}^{I} q_i \chi_{U_i}$, allora:

$$\|g-h\|_p = \left\| \sum a_i \chi_{E_i} - \sum q_i \chi_{U_i} \right\|_p \leq \sum \|a_i \chi_{E_i} - q_i \chi_{U_i}\|_p$$

$$\|a_i \chi_{E_i} - q_i \chi_{U_i}\|_p = \|(a_i - q_i)\chi_{E_i} + q_i\left(\chi_{E_i} - \chi_{U_i}\right)\|_p$$

Ricordando che $|\chi_{E_i} - \chi_{U_i}| = \chi_{U_i \triangle E_i}$, si ha che:

$$\begin{aligned} \|g-h\|_p &\leq \sum |a_i - q_i| \cdot \|\chi_{E_i}\|_p + |q_i| \cdot \|\chi_{E_i} - \chi_{U_i}\|_p \\ &\leq \sum \delta \cdot M^{1/p} + (M+\delta) \cdot \delta^{1/p} \to 0 \quad \text{per } \delta \to 0 \end{aligned}$$

Si ottiene dunque che $\forall \epsilon > 0$, $\exists \delta > 0 :\ \|g-h\|_p < \epsilon$ e quindi:

$$\|f-h\|_p \leq \|f-g\|_p + \|g-h\|_p < 2\epsilon$$

Le funzioni a scalino a valori razionali su intervalli ad estremi razionali formano un insieme numerabile, e per quanto dimostrato ora, denso, pertanto si ha la tesi. $\square$

A differenza degli altri spazi $\mathscr{L}^p$, $\mathscr{L}^\infty$ non è separabile. Per dimostrarlo, si utilizza la non separabilità dello spazio delle successioni limitate a valori reali.

Definizione 7.7. $l^p \overset{\text{def}}{=} \mathscr{L}^p\left(\mathbb{N}, 2^{\mathbb{N}}, \#\right)$ *con* $1 \leq p \leq +\infty$*, dove* $\#$ *è la misura che 'conta i punti'.*

Osservazione. $f \in l^p$ *se e solo se* $\{f(n)\}$ *è tale che* $\sum_{n=1}^{\infty} |f(n)|^p < +\infty$ *se* $p < +\infty$ *o* $\sup_{n \in \mathbb{N}} |f(n)| < +\infty$ *se* $p = +\infty$ *(su* $\mathbb{N}$ sup *e* supess *coincidono)*

Proposizione 7.18. l^∞ *non è separabile.*

Dimostrazione. Siano $E, F \subseteq \mathbb{N}$ sottoinsiemi non vuoti distinti; allora $|\chi_E - \chi_F|$ assume il valore 1 in almeno un punto, quindi $\|\chi_E - \chi_F\|_\infty = 1$; si considera dunque:

$$\mathscr{F} = \left\{ \chi_E \,:\, E \subseteq \mathbb{N},\ E \neq \phi \right\}$$

Presi due elementi distinti di $\mathscr{F}$, la norma infinito della loro differenza è 1; $\mathscr{F} \cong 2^{\mathbb{N}}$, e dunque $\mathscr{F}$ ha la cardinalità del continuo. Supponiamo per assurdo che l^∞ sia separabile, allora esiste $\mathscr{S} \subseteq l^\infty$ denso e numerabile. Allora:

$$\forall f \in l^\infty,\ \exists s \in \mathscr{S} \ \text{ tale che } \ \|f - s\|_\infty < 1/3$$

Sia $T : \mathscr{F} \longrightarrow \mathscr{S}$ l'applicazione che associa

$$\mathscr{F} \ni f \mapsto T(f) = s \in \mathscr{S} \text{ tale che } \|f - s\|_\infty < 1/3$$

Se $f = \mathcal{X}_E$ e $g = \mathcal{X}_F$ con $E \neq F$, allora $\|T(f) - f\|_\infty < 1/3$ e $\|T(g) - g\|_\infty < 1/3$, quindi $T(f) \neq T(g)$, perché

$$\|T(f) - T(g)\|_\infty \geq \|f - g\|_\infty - \|T(f) - f\|_\infty - \|T(g) - g\|_\infty > 1/3 > 0$$

Ma $\mathscr{S}$ è numerabile, e T è iniettiva, assurdo. □

Corollario 7.19. *$\mathscr{L}^\infty(\mathbb{R}^n)$ non è separabile.*

Dimostrazione. Sia $\{Q_k\}$ la scomposizione di $\mathbb{R}^n$ in cubi di lato 1 a due a due internamente disgiunti. Sia

$$Y = \left\{ f \in \mathscr{L}^\infty(\mathbb{R}^n) \,:\, f = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \mathcal{X}_{Q_k} \right\}$$

Sia $T : l^\infty \longrightarrow Y$ la funzione tale che:

$$T\big(\{a_k\}\big) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \mathcal{X}_{Q_k}$$

Si ha che T è lineare e che:

$$\left\|T\big(\{a_k\}\big)\right\|_{\mathscr{L}^\infty(\mathbb{R}^n)} = \|\{a_k\}\|_{l^\infty}$$

Infatti $T\big(\{a_k\}\big)(\mathbb{R}^n) = \big\{a_k \,:\, k \in \mathbb{N}\big\}$, e dal momento che anche escludendo un insieme di misura nulla, l'immagine di $\mathbb{R}^n$ attraverso $T\big(\{a_k\}\big)$ non cambia, si ha che:

$$\left\|T\big(\{a_k\}\big)\right\|_{\mathscr{L}^\infty(\mathbb{R}^n)} = \operatorname{supess}_{\mathbb{R}^n} \left|T\big(\{a_k\}\big)\right| = \sup\big\{\, |a_k| \,:\, k \in \mathbb{N}\big\} = \|\{a_k\}\|_{l^\infty}$$

Dunque T è un'applicazione lineare che conserva le distanze, ovvero è un'isometria. Si può ripetere l'argomento usato nella dimostrazione delle proposizione 7.18 sostituendo l'insieme $\mathscr{F}$ con l'insieme $T(\mathscr{F})$ che ha ancora la cardinalità del continuo e i cui elementi distano tutti 1 tra loro. □

Proposizione 7.20. *Sia $p < +\infty$; allora la famiglia*

$$\mathscr{S} = \Big\{ \{a_n\} \,:\, a_n \in \mathbb{Q} \;\; \forall n \text{ ed } \exists N \in \mathbb{N} \text{ tale che } a_n = 0 \;\; \forall n \geq N \Big\}$$

è numerabile e densa in l^p.

7.4 Prodotto di convoluzione e nuclei mollificatori

Proposizione 7.21. *Siano f, g, h funzioni misurabili su $(\mathbb{X}, \mathscr{A}, \mu)$, spazio con misura; siano $p, q, r > 1$ tali che $1/p + 1/q + 1/r = 1$. Allora*

$$\int_{\mathbb{X}} |fgh| \leq \|f\|_p \, \|g\|_q \, \|h\|_r$$

Dimostrazione. Si applica due volte la disuguagliaza di Hölder. □

Definizione 7.8. (Prodotto di convoluzione tra f e g)
Siano f, g funzioni misurabili su $\mathbb{R}^n$; se per un $x \in \mathbb{R}^n$ è finito

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)\,\mathrm{d}\mu(y)$$

lo si chiama $f \star g(x)$, detto prodotto di convoluzione tra f e g in x.

Osservazione. *Ove è definito, il prodotto di convoluzione è commutativo:*

$$f \star g(x) = g \star f(x)$$

Infatti effettuando la sostituzione $\big(z = x - y\big)$:

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)\,\mathrm{d}\mu(y) = \int_{\mathbb{R}^n} f(z)g(x-z)\,\mathrm{d}\mu(z)$$

(traslazioni e simmetrie non cambiano la misura degli insiemi)

Osservazione. *Se $f \in \mathscr{L}^1$ e $g \in \mathscr{L}^\infty$, allora $f \star g$ è definito su tutto $\mathbb{R}^n$, perché:*

$$|f(x-y)g(y)| = |f(x-y)| \cdot |g(y)| \le |f(x-y)\, \|g\|_\infty$$

che è integrabile su $\mathbb{R}^n$

Proposizione 7.22. (Disuguaglianza di Young per convoluzioni)
Siano $p, q \ge 1$ tali che $1/p + 1/q \ge 1$; sia r tale che

$$1/p + 1/q = 1 + 1/r$$

Se $f \in \mathscr{L}^p$ e $g \in \mathscr{L}^q$, allora $f \star g$ è definito su quasi tutto $\mathbb{R}^n$ e vale $f \star g \in \mathscr{L}^r$ ed inoltre

$$\|f \star g\|_r \le \|f\|_p \cdot \|g\|_q$$

Dimostrazione. Supponiamo per il momento che la disuguaglianza sia vera per f, g semplici e non negative. Siano $f \in \mathscr{L}^p$ e $g \in \mathscr{L}^q$ qualunque e siano $\{f_n\}$, $\{g_n\}$ successioni di funzioni semplici non negative tali che $f_n \to |f|$ e $g_n \to |g|$ in modo crescente. Allora

$$|f(x-y)g(y)| = \lim_{n\to+\infty} |f_n(x-y)g_n(y)|$$

Per la convergenza monotona:

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)g(y)| = \lim_{n\to+\infty} f_n \star g_n$$

Inoltre sempre per convergenza monotona:

$$\|f_n \star g_n\|_r \le \|f_n\|_p \cdot \|g_n\|_q \to \|f\|_p \cdot \|g\|_q$$

Quindi $\|\, |f| \star |g| \,\|_r \le \|f\|_p \cdot \|g\|_q$, dunque $|f| \star |g|$ è finito per quasi ogni $x \in \mathbb{R}^n$, e pertanto anche $f \star g$ è finito per quasi ogni $x \in \mathbb{R}^n$, infatti:

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)\,\mathrm{d}\mu(y) \right| \le \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)| \cdot |g(y)|\,\mathrm{d}\mu(y) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad |f \star g| \leq |f| \star |g|$$

Quindi, se il teorema vale per funzioni semplici non negative, allora esso vale nella sua generalità.
Si dimostra ora che il teorema vale per funzioni semplici non negative. Si nota che se f e g sono funzioni semplici integrabili, allora esse sono limitate e nulle al di fuori di un insieme di misura finita, pertanto $f(x-y)g(y)$ come funzione di y è integrabile.
Sia $r = 1$, ovvero ${}^1/_p + {}^1/_q = 2$ e dunque, poiché $p, q \geq 1$ si ha che l'unica configurazione possibile è $p = q = 1$. Siano f e g funzioni semplici non negative, allora

$$\begin{aligned} \|f \star g\|_1 &= \int \mathrm{d}\mu(x) \int f(x-y)g(y)\, \mathrm{d}\mu(y) = \\ &= \int g(y)\, \mathrm{d}\mu(y) \int f(x-y)\, \mathrm{d}\mu(x) = \|f\|_1 \cdot \|g\|_1 \end{aligned}$$

dunque in questo caso vale l'uguaglianza.
Sia $r > 1$, allora per la caratterizzazione duale della norma r

$$\|f \star g\|_r = \sup \left\{ \int (f \star g)\, h \ : \ h \in \mathscr{L}^{r'}, \ \|h\|_{r'} = 1 \right\}$$

Poiché $r > 1$ allora $r' < +\infty$ ed in $\mathscr{L}^{r'}$ le funzioni semplici sono dense, dunque il sup può essere fatto sulle funzioni semplici non negative:

$$\|f \star g\|_r = \sup \left\{ \int (f \star g)\, h \ : \ h \text{ semplice}, \ h \geq 0, \ h \in \mathscr{L}^{r'}, \ \|h\|_{r'} = 1 \right\}$$

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} (f \star g) h &= \int_{\mathbb{R}^n} h(x)\, \mathrm{d}\mu(x) \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)\, \mathrm{d}\mu(y) = \\ &= \int_{\mathbb{R}^{2n}} h(x) f(x-y) g(y)\, \mathrm{d}\mu(x,y) \end{aligned}$$

Si pone ora

$$h(x) = h(x)^\alpha h(x)^{1-\alpha} \quad f(x-y) = f(x-y)^\beta f(x-y)^{1-\beta} \quad g(y) = g(y)^\gamma g(y)^{1-\gamma}$$

con $0 \leq \alpha, \beta, \gamma \leq 1$ da determinarsi. Si ottiene:

$$\int_{\mathbb{R}^n} (f \star g) h = \int_{\mathbb{R}^{2n}} \left(h(x)^\alpha f(x-y)^\beta\right) \left(h(x)^{1-\alpha} g(y)^\gamma\right) \left(f(x-y)^{1-\beta} g(y)^{1-\gamma}\right)$$

Siano ora s, t, u tali che ${}^1/_s + {}^1/_t + {}^1/_u = 1$, allora per la proposizione precedente si ha che

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n}(f\star g)h &\leq \left[\int_{\mathbb{R}^{2n}}\left(h(x)^{\alpha}f(x-y)^{\beta}\right)^{s}\right]^{1/s}\cdot\\ &\cdot\left[\int_{\mathbb{R}^{2n}}\left(h(x)^{(1-\alpha)}g(y)^{\gamma}\right)^{1/t}\right]\cdot\left[\int_{\mathbb{R}^{2n}}\left(f(x-y)^{(1-\beta)}g(y)^{(1-\gamma)}\right)^{1/u}\right]=\\ &=\left(\int_{\mathbb{R}^n}h^{\alpha s}\int_{\mathbb{R}^n}f^{\beta s}\right)^{1/s}\cdot\\ &\quad\cdot\left(\int_{\mathbb{R}^n}h^{(1-\alpha)t}\int_{\mathbb{R}^n}g^{\gamma t}\right)^{1/s}\cdot\left(\int_{\mathbb{R}^n}f^{(1-\beta)u}\int_{\mathbb{R}^n}g^{(1-\gamma)u}\right)^{1/s}=\\ &=\left(\int_{\mathbb{R}^n}h^{\alpha s}\right)^{1/s}\cdot\left(\int_{\mathbb{R}^n}h^{(1-\alpha)t}\right)^{1/t}\cdot\\ &\cdot\left(\int_{\mathbb{R}^n}f^{\beta s}\right)^{1/s}\cdot\left(\int_{\mathbb{R}^n}f^{(1-\beta)u}\right)^{1/u}\cdot\left(\int_{\mathbb{R}^n}g^{\gamma t}\right)^{1/t}\cdot\left(\int_{\mathbb{R}^n}g^{(1-\gamma)u}\right)^{1/u}\end{aligned}$$

Si scelgono β, γ, s, t, u in modo che

$$\beta s=(1-\beta)u=p \quad \text{e} \quad (1-\gamma)u=\gamma t=q$$

Ovvero si hanno le seguenti relazioni

$$\frac{1}{s}=\frac{\beta}{p} \qquad \frac{1}{u}=\frac{1-\beta}{p}$$

e quindi

$$\frac{1}{s}+\frac{1}{u}=\frac{1}{p}$$

Inoltre

$$\frac{1}{t}=\frac{\gamma}{q} \qquad \frac{1}{u}=\frac{1-\gamma}{q}$$

e quindi anche

$$\frac{1}{t}+\frac{1}{u}=\frac{1}{q}$$

In questo modo:

$$\int_{\mathbb{R}^n}(f\star g)h \;\leq\; \left(\int h^{\alpha s}\right)^{1/s}\left(\int h^{(1-\alpha)t}\right)^{1/t}\cdot\|f\|_p\cdot\|g\|_q$$

Si hanno le seguenti due relazioni:

$$\frac{1}{s}+\frac{1}{t}+\frac{1}{u}=1 \qquad \text{e} \qquad \frac{1}{s}+\frac{1}{t}+\frac{2}{u}=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}$$

Quindi si ottiene che

$$\frac{1}{u}=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}-1 \qquad \text{ma} \qquad \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1+\frac{1}{r}$$

Dunque $\frac{1}{u}=1+\frac{1}{r}-1=\frac{1}{r}$ ovvero $u=r$. Di conseguenza

$$\frac{1}{s}+\frac{1}{t} \;=\; 1-\frac{1}{u} \;=\; 1-\frac{1}{r} \;=\; \frac{1}{r'}$$

Sia α tale che

$$\alpha s = (1-\alpha)t = r' \qquad \text{quindi} \qquad \frac{1}{s} = \frac{\alpha}{r'}\ ,\ \frac{1}{t} = \frac{1-\alpha}{r'}$$

In questo modo si determina in modo univoco α tra 0 ed 1 e segue

$$\int_{\mathbb{R}^n} (f \star g)h \ \leq \ \|h\|_{r'} \cdot \|f\|_p \cdot \|g\|_q \ = \ \|f\|_p \cdot \|g\|_q$$

perchè $\|h\|_{r'} = 1$, e quindi si ha la tesi. □

Si cerca, attraverso questo prodotto, di approssimare funzioni in $\mathscr{L}^p$ con funzioni lisce.

Teorema 7.23. (Continuità nel senso di $\mathscr{L}^p$)
Sia $p < +\infty$, allora se $f \in \mathscr{L}^p(\mathbb{R}^n)$ si ha che $\forall \epsilon > 0,\ \exists\, \delta > 0$:

$$\forall y \in \mathbb{R}^n \ \textit{con}\ |y| < \delta \ \textit{si ha che}\ \|f(\cdot - y) - f(\cdot)\|_p < \epsilon$$

Dimostrazione. Sia f semplice, $f = \sum a_i \mathcal{X}_{E_i}$ in rappresentazione canonica. Dal momento che $f \in \mathscr{L}^p$, allora $\mu(E_i) < +\infty \ \ \forall i$. Si ha che:

$$f(x-y) - f(x) = \sum a_i \big(\mathcal{X}_{E_i}(x-y) - \mathcal{X}_{E_i}(x)\big)$$

Posto $E_i + y = \Big\{x \ :\ \ x - y \in E_i\Big\}$ si ha

$$f(x-y) - f(x) = \sum a_i \big(\mathcal{X}_{E_i+y} - \mathcal{X}_{E_i}\big)(x)$$

$$\|f(\cdot - y) - f(\cdot)\|_p \leq \sum |a_i| \cdot \mu\left(E_i + y \bigtriangleup E_i\right)^{1/p}$$

Si ha che per ogni $\epsilon > 0$, per ogni i esiste U_i, unione finita di intervalli limitati tale che:

$$\mu\left(U_i \bigtriangleup E_i\right) < \epsilon$$

Quindi si ottiene che

$$\begin{aligned} \mu\left((E_i + y) \bigtriangleup E_i\right) \ &\leq \ \mu\left((E_i + y) \bigtriangleup (U_i + y)\right) + \mu\left((U_i + y) \bigtriangleup U_i\right) + \mu\left(E_i \bigtriangleup U_i\right) \leq \\ &\leq \ 2\epsilon + \mu\left((U_i + y) \bigtriangleup U_i\right) \end{aligned}$$

Ora, si ha che per un singolo intervallo $\mu\left(I \bigtriangleup (I + y)\right) = O(|y|)$, e dunque così vale anche per unioni finite di intervalli, ovvero per gli insiemi U_i. Quindi $\mu\left((E_i + y) \bigtriangleup E_i\right) \leq 2\epsilon + C|y|$, dunque se $|y| < \epsilon$ si ha che

$$\|f(\cdot - y) - f(\cdot)\|_p \leq C \sum |a_i| \big(\epsilon\big)^{1/p} \to 0 \quad \text{per} \quad \epsilon \to 0$$

Sia ora $f \in \mathscr{L}^p$ qualunque; si ha che $\forall \epsilon > 0$ esiste $\varphi \in \mathscr{L}^p$ semplice tale che $\|\varphi - f\|_p < \epsilon$, dunque

$$\begin{aligned} \|f(\cdot - y) - f(\cdot)\|_p \ &\leq \ \|f(\cdot - y) - \varphi(\cdot - y)\|_p + \|\varphi(\cdot - y) - \varphi(\cdot)\|_p + \|\varphi(\cdot) - f(\cdot)\|_p \leq \\ &\leq \ 2\epsilon + \|\varphi(\cdot - y) - \varphi(\cdot)\|_p \end{aligned}$$

ed inoltre per quanto dimostrato esiste $\delta > 0$ tale che

$$\text{se } |y| < \delta \text{ allora } \|\varphi(\cdot - y) - \varphi(\cdot)\|_p < \epsilon$$

dunque in definitiva si ottiene

$$\|f(\cdot - y) - f(\cdot)\|_p \leq 3\epsilon$$

□

Definizione 7.9. (Modulo di continuità in $\mathscr{L}^p$)
Presa $f \in \mathscr{L}^p(\mathbb{R}^n)$ con $p < +\infty$ si pone:

$$\omega_p(r) = \sup_{|y| \leq r} \|f(\cdot - y) - f(\cdot)\|_p$$

Allora $\omega_p(r)$ è una funzione crescente di r e

$$\lim_{r \to o^+} \omega_p(r) = 0$$

Definizione 7.10. *Si consideri $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ (una funzione dotata di tutte le derivate a supporto compatto) tale che:*

1. $\varphi \geq 0$

2. φ ha supporto in $B_1(0)$

3. $\varphi(-x) = \varphi(x)$

4. $\displaystyle\int_{B_1(0)} \varphi = 1$

Una funzione così fatta la si può ottenere come segue. Prendiamo

$$\eta(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-|x|^2}} & |x| < 1 \\ 0 & |x| \geq 1 \end{cases}$$

Questa funzione è continua ed ha supporto in $B_1(0)$, e per ogni multiindice $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ si ha che

$$D^\alpha \eta(x) = \begin{cases} R_n(x) \cdot e^{-\frac{1}{1-|x|^2}} & |x| < 1 \\ 0 & |x| \geq 1 \end{cases}$$

dove R_n è una funzione razionale divergente solo su $\{|x| = 1\}$; la funzione η è dunque C^∞.
Si pone:

$$\varphi(x) = \frac{\eta(x)}{\int_{B_1(0)} \eta}$$

che soddisfa tutte e quattro le condizioni richieste.

Definizione 7.11. (Nuclei mollificatori)
Per ogni $\epsilon > 0$ ai pone $\varphi_\epsilon(x) = \frac{1}{\epsilon^n}\varphi\left(\frac{x}{\epsilon}\right)$ che ha supporto nella palla di centro 0 e di raggio ϵ, è C^∞ e vale che, con la sostituzione $y = x/\epsilon$:

$$\int_{B_\epsilon(0)} \varphi_\epsilon = \frac{1}{\epsilon^n} \int_{B_\epsilon} \varphi\left(\frac{x}{\epsilon}\right) \mathrm{d}\mu(x) = \int_{B_1(0)} \varphi(y)\, \mathrm{d}\mu(y) = 1$$

La famiglia di funzioni $\{\varphi_\epsilon\}$ prende il nome di famiglia di nuclei mollificatori (perchè servono per 'ammorbidire' le funzioni).

Definizione 7.12. *Presa $f \in \mathscr{L}^p(\mathbb{R}^n)$ con $p < +\infty$ si pone $f_\epsilon = f \star \varphi_\epsilon$. La funzione f_ϵ si dirà la mollificata di passo ϵ di f.*

Proposizione 7.24. *Sia $f \in \mathscr{L}^p(\mathbb{R}^n)$ con $p < +\infty$, allora $\forall \epsilon > 0$:*

1. $\|f_\epsilon\|_p \leq \|f\|_p$
2. $f_\epsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$

Dimostrazione. 1. Segue dalla disuguaglianza di Young per convoluzioni:

$$\|f_\epsilon\|_p \leq \|\varphi_\epsilon\|_1 \cdot \|f\|_p = \|f\|_p$$

2. $f_\epsilon(x) = \displaystyle\int \varphi_\epsilon(y-x) f(y)\,\mathrm{d}\mu(y)$, preso $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ multiindice, per il teorema di derivazione sotto al segno di integrale si ha:

$$D_x^\alpha f_\epsilon(x) = \int \Big(D^\alpha \varphi_\epsilon(y-x)\Big) f(y)\,\mathrm{d}\mu(y)$$

Inoltre si ha che

$$\|f_\epsilon\|_\infty \leq \|\varphi_\epsilon\|_{p'} \cdot \|f\|_p < +\infty$$

dunque la funzione è quasi ovunque limitata, ed analogamente

$$\|D^\alpha f_\epsilon\|_\infty \leq \|D^\alpha \varphi_\epsilon\|_{p'} \cdot \|f\|_p < +\infty$$

dunque tutte le derivate limitate.

□

Osservazione. *Notiamo che $f_\epsilon = \varphi_\epsilon \star f$ rappresenta una media pesata di f sulla palla B_ϵ di centro x, perchè*

$$f_\epsilon(x) = \frac{\int_{B_\epsilon} \varphi_\epsilon(z) f(x+z)\,\mathrm{d}\mu(z)}{\int_{B_{\epsilon(0)}} \varphi_\epsilon(z)\,\mathrm{d}\mu(z)}$$

Proposizione 7.25. *Presa $f \in \mathscr{L}^p(\mathbb{R}^n)$ con $p < +\infty$ e detto ω_p il modulo di continuità in $\mathscr{L}^p$ di f, si ha che:*

$$\|f_\epsilon - f\|_p \leq \omega_p(\epsilon) \to 0 \quad \textit{per } \epsilon \to 0$$

Dimostrazione. Dal momento che, fissato $x \in \mathbb{R}^n$, la funzione $\varphi_\epsilon(x-y)$, come funzione di y è nulla al di fuori di $B_\epsilon(x)$ si ha che:

$$\begin{aligned}
(f_\epsilon - f)(x) &= \int_{B_\epsilon(x)} \varphi_\epsilon(x-y) f(y)\,\mathrm{d}\mu(y) - f(x) = \\
&= \int_{B_\epsilon(x)} \varphi_\epsilon(x-y) f(y)\,\mathrm{d}\mu(y) - f(x) \int_{B_\epsilon(x)} \varphi_\epsilon(x-y)\,\mathrm{d}\mu(y) = \\
&= \int_{B_\epsilon(x)} \varphi_\epsilon(x-y)\Big(f(y) - f(x)\Big)\,\mathrm{d}\mu(y) = \qquad \big(z = x-y\big) \\
&= \int_{B_\epsilon(0)} \varphi_\epsilon(z)\Big(f(x-z) - f(x)\Big)\,\mathrm{d}\mu(z)
\end{aligned}$$

Passando dunque alle norme e usando la disuguaglianza di Minkowsky integrale:

$$
\begin{aligned}
\|f_\epsilon - f\|_p &\leq \left\| \int_{B_\epsilon(0)} \varphi_\epsilon(z)\Big(f(\cdot - z) - f(\cdot)\Big)\,\mathrm{d}\mu(z) \right\|_p \leq \\
&\leq \int_{B_\epsilon(0)} \left\| \varphi_\epsilon(z)\Big(f(\cdot - z) - f(\cdot)\Big)\right\|_p \mathrm{d}\mu(z) = \\
&= \int_{B_\epsilon(0)} \varphi_\epsilon(z) \left\| f(\cdot - z) - f(\cdot)\right\|_p \mathrm{d}\mu(z) \leq \\
&\leq \int_{B_\epsilon(0)} \varphi_\epsilon(z)\omega_p(\epsilon)\,\mathrm{d}\mu(z)
\end{aligned}
$$

In definitiva:

$$
\|f_\epsilon - f\|_p \leq \omega_p(\epsilon) \int_{B_\epsilon(0)} \varphi_\epsilon(z)\,\mathrm{d}\mu(z) = \omega_p(\epsilon)
$$

□

Teorema 7.26. *Per ogni $p < +\infty$, la classe delle funzioni $f \in \mathscr{L}^p(\mathbb{R}^n) \cap C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ è densa in $\mathscr{L}^p$.*

Dimostrazione. Presa $f \in \mathscr{L}^p(\mathbb{R}^n)$ sia $f_R = f \cdot \mathcal{X}_{B_R}$; allora

$$
\|f - f_R\|_p = \left(\int_{\mathbb{R}^n \setminus B_R} |f|^p \right)^{1/p}
$$

$$
\int_{\mathbb{R}^n \setminus B_R} |f|^p = \int_{\mathbb{R}^n} |f|^p - \int_{B_R} |f|^p
$$

Si ha che, per convergenza dominata:

$$
\int_{B_R} |f|^p \to \int_{\mathbb{R}^n} |f|^p \quad \text{per } R \to +\infty
$$

Dunque $\lim\limits_{R\to+\infty} \|f - f_R\|_p = 0$.
Preso $\eta > 0$, sia $R > 0$ tale che $\|f - f_R\|_p < \eta$. Sia

$$
g_\epsilon = \big(f_R\big)_\epsilon = \varphi_\epsilon \star f_R, \qquad g_\epsilon \in C^\infty
$$

Quindi $\|g_\epsilon - f_R\|_p \to 0$ per $\epsilon \to 0$, dunque esiste $\epsilon > 0$ tale che $\|g_\epsilon - f_R\|_p < \eta$. Si ha che $g_\epsilon(x) = 0$ se $|x| > R + \epsilon$; in tal caso, infatti, dal momento che f_R è nulla al di fuori di B_R e che, fissato $x \in \mathbb{R}^n$, la funzione $\varphi_\epsilon(x-y)$, come funzione di y è nulla al di fuori di $B_\epsilon(x)$ si ha che:

$$
g_\epsilon(x) = \int_{B_R(0) \cap B_\epsilon(x)} \varphi_\epsilon(x-y) f_R(y)\,\mathrm{d}\mu(y) = 0
$$

Pertanto $g_\epsilon \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ e

$$
\|g_\epsilon - f\|_p \leq \|g_\epsilon - f_R\|_p + \|f_R - f\|_p < 2\eta
$$

□

7.5 Teorema di rappresentazione

Definizione 7.13. *Siano* $\mathbb{X}$ *e* $\mathbb{Y}$ *due spazi normati e sia* $T : \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{Y}$ *un operatore lineare;* T *si dice limitato se esiste* $M > 0$ *tale che*

$$\|Tx\|_{\mathbb{Y}} \leq M \|x\|_{\mathbb{X}} \qquad \forall x \in \mathbb{X}$$

Proposizione 7.27. *Sia* $T : \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{Y}$ *un operatore lineare tra due spazi normati; allora le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

1) T *è continuo*

2) T *è continuo in un punto*

3) T *è limitato*

Dimostrazione. 1) $\Rightarrow$ 2) è ovvia, proviamo 2) $\Rightarrow$ 3). Sia $x_0 \in \mathbb{X}$ tale che T è continuo in x_0; allora

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \ \|x - x_0\| < \delta \quad \Rightarrow \quad \|Tx - Tx_0\| < \epsilon$$

Per ogni $z \in \mathbb{X}$ con $z \neq 0$ si considera $x = x_0 + \delta \dfrac{z}{\|z\|}$, allora

$$Tx = Tx_0 + \frac{\delta}{\|z\|} Tz \quad \Rightarrow \quad Tz = \frac{\|z\|}{\delta}\big(Tx - Tx_0\big)$$

Si ricava $\|Tz\| < \dfrac{\epsilon}{\delta} \|z\|$, dunque preso $M = \frac{\epsilon}{\delta}$ si ottiene la limitatezza per l'operatore T.
3) $\Rightarrow$ 1)
Si ha che

$$\forall x, x_0 \in \mathbb{X}, \qquad Tx - Tx_0 = T(x - x_0)$$

Quindi $\|Tx - Tx_0\| \leq M \|x - x_0\| \to 0$ per $x \to x_0$, pertanto T è continuo. □

Definizione 7.14. *Sia* $B(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ *la classe degli operatori limitati tra due spazi normati* $\mathbb{X}$ *ed* $\mathbb{Y}$*. Preso* $T \in B(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$*, si pone:*

$$\|T\| = \sup\big\{ \|Tx\| \ : \ \|x\| = 1 \big\}$$

Osservazione. $B(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ *è uno spazio vettoriale. Proveremo che è anche uno spazio lineare normato. Intanto vediamo che*

$$\|T\| = \sup\left\{ \frac{\|Tx\|}{\|x\|} \ : \ x \in \mathbb{X} \setminus \{0\} \right\} = \sup\big\{ \|Tx\| \ : \ \|x\| \leq 1 \big\}$$

Proposizione 7.28. $\Big(B(\mathbb{X}, \mathbb{Y}), \|\cdot\|\Big)$ *è uno spazio vettoriale normato e se* $\mathbb{Y}$ *è completo, anch'esso è completo.*

Dimostrazione. $\|\cdot\|$ è effettivamente una norma.
Sia $\mathbb{Y}$ completo, e sia $\{T_n\}$ una successione di Cauchy in $B(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$. Sia $x \in \mathbb{X}$ fissato, allora

$$\|T_n x - T_m x\| \leq \|T_n - T_m\| \cdot \|x\| \to 0 \qquad \text{per } \ n, m \to +\infty$$

Pertanto $\forall x \in \mathbb{X}$, $\{T_n x\}$ è una successione di Cauchy in $\mathbb{Y}$, che è completo, allora esiste un limite, dunque si pone

$$T(x) = \lim_{n\to+\infty} T_n x$$

Si verifica che T è lineare e limitato.

$$\begin{aligned} T(\alpha x + \beta y) &= \lim_{n\to+\infty} T_n(\alpha x + \beta y) = \lim_{n\to+\infty}(\alpha T_n(x) + \beta T_n(y) = \\ &= \alpha \lim_{n\to+\infty} T_n(x) + \beta \lim_{n\to+\infty} T_n(y) = \alpha T(x) + \beta T(y) \end{aligned}$$

Quindi T è lineare.
Inoltre $\|T_n\| \le \|T_m\| + \|T_n - T_m\| \quad \forall n, m \in \mathbb{N}$, pertanto:

$$\Big| \|T_n\| - \|T_m\| \Big| \le \|T_n - T_m\| \to 0 \qquad \text{per } \; n, m \to +\infty$$

Quindi $\{\|T_n\|\}$ è di Cauchy in $\mathbb{R}$, duque è limitata, cioè $\|T_n\| \le C \quad \forall n$, quindi $\|Tx\| \le C\,\|x\|$, pertanto $T \in B(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$.
Bisogna ora dimostrare che non si ha solo la convergenza puntuale, ma anche quella in norma, ovvero che $\|T_n - T\| \to 0$; dato che $\|T_n - T_m\| \to 0$ per $n, m \to +\infty$, si ha che

$$\forall x \in \mathbb{X}, \quad \forall \epsilon > 0\ \exists N : \;\text{ se }\; n, m > N \;\text{ allora }\; \|T_n x - T_m x\| \le \epsilon\,\|x\|$$

Fisssato x, per $m \to +\infty$ si ha che

$$\|T_n x - Tx\| \le \epsilon\,\|x\| \quad \text{ovvero} \quad \|T_n - T\| \le \epsilon \;\; \forall n > N$$

□

Definizione 7.15. *Preso $\mathbb{X}$ spazio lineare normato si pone*

$$\mathbb{X}^\star \stackrel{\text{def}}{=} B(\mathbb{X}, \mathbb{R})$$

$\mathbb{X}^\star$ si dice spazio duale (topologico) di $\mathbb{X}$, che può essere più piccolo del duale algebrico di $\mathbb{X}$.

Osservazione. *Se p e q sono esponenti coniugati, se $g \in \mathscr{L}^q$, allora*

$$Tf = \int_{\mathbb{X}} fg$$

è un funzionale lineare limitato su $\mathscr{L}^p$ per la disuguaglianza di Hölder.

Lemma 7.29. (Hölder a rovescio)
Sia $0 < s < 1$ e siano f, g funzioni misurabili su $(\mathbb{X}, \mathscr{A}, \mu)$ tali che

$$0 < \int_{\mathbb{X}} |g|^{s'} < +\infty \quad \textit{dove} \quad s' = \frac{s}{s-1} < 0$$

Allora vale che

$$\int_{\mathbb{X}} |fg| \ge \left(\int_{\mathbb{X}} |f|^s\right)^{1/s} \left(\int_{\mathbb{X}} |g|^{s'}\right)^{1/s'}$$

Dimostrazione. La disuguaglianza da dimostrare è equivalente a

$$\left(\int_{\mathbb{X}} |f|^s\right)^{1/s} \leq \left(\int_{\mathbb{X}} |fg|\right)\left(\int_{\mathbb{X}} |g|^{s'}\right)^{-1/s'}$$

$$\int_{\mathbb{X}} |f|^s \leq \left(\int_{\mathbb{X}} |fg|\right)^s \left(\int_{\mathbb{X}} |g|^{s'}\right)^{-s/s'}$$

Ora siano $\varphi = |g|^{-s}$ e $\psi = |fg|^s$, allora

$$|f|^s = \psi\varphi \quad |fg| = \psi^{1/s} \quad |g|^{s'} = |g|^{-\frac{s}{1-s}} = \varphi^{\frac{1}{1-s}}$$

A questo punto la disuguaglianza da dimostrare diventa:

$$\int_{\mathbb{X}} \psi\varphi \leq \left(\int_{\mathbb{X}} \psi^{1/s}\right)^s \left(\int_{\mathbb{X}} \varphi^{\frac{1}{1-s}}\right)^{1-s}$$

Se si sceglie $p = \frac{1}{s}$ e $p' = \frac{1}{1-s}$ questa è la disuguaglianza di Hölder. □

Lemma 7.30. (Minkowsky a rovescio)
Sia $0 < s < 1$, *allora* $\forall u, v$ *funzioni misurabili su* $(\mathbb{X}, \mathscr{A}, \mu)$ *vale*

$$\left(\int_{\mathbb{X}} (|u| + |v|)^s\right)^{1/s} \geq \left(\int_{\mathbb{X}} |u|^s\right)^{1/s} + \left(\int_{\mathbb{X}} |v|^s\right)^{1/s}$$

Dimostrazione. Segue da Hölder a rovescio, analogamente a come la disuguaglianza di Minkowsky segue da quella di Hölder. □

Osservazione. *Ricordiamo che se* $a, b \geq 0$ *e se* $1 \leq p < +\infty$ *allora* $(a+b)^p \leq 2^{p-1}(a^p + b^p)$.

Lemma 7.31. *Per ogni* $0 < s < 1$ *la funzione*

$$f(x) = \frac{1}{x} \cdot (1 - s^x)$$

è decrescente.

Dimostrazione.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{x^2}\big(x(-s^x \log s) - 1 + s^x\big) = \frac{1}{x^2}\big(s^x(1 - x\log s) - 1\big) = \\ &= \frac{1}{x^2}\big(s^x(1 - \log s^x) - 1\big) \end{aligned}$$

Se $t = s^x$ e $g(t) = t(1 - \log t)$ per $0 < t < 1$ allora

$$g'(t) = (1 - \log t) - 1 = -\log t > 0$$

dunque g è crescente, pertanto $g(t) \leq g(1)$ per ogni $t \in (0, 1)$ e quindi

$$f'(x) = \frac{1}{x^2}\Big(g\big(t(x)\big) - 1\Big) < 0$$

da cui la tesi. □

Lemma 7.32. *Sia $1 < p \leq 2$ e sia $t \in [0,1]$, allora:*

$$\left(\frac{1+t}{2}\right)^{p'} + \left(\frac{1-t}{2}\right)^{p'} \geq \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}t^p\right)^{\frac{1}{p-1}}$$

dove p' è l'esponente coniugato a p.

Dimostrazione. Se $p = 2$ vale l'uguaglianza. Se $p < 2$ e $t \in \{0,1\}$ vale l'uguaglianza. Siano dunque $1 < p < 2$ e $0 < t < 1$. Si ponga:

$$t = \frac{1-s}{1+s} \qquad \text{con} \qquad 0 < s < 1$$

La disuguaglianza da dimostrare risulta equivalente a:

$$\frac{1}{2}\left[(1+s)^p + (1-s)^p\right] - \left(1 + s^{p'}\right)^{p-1} \geq 0$$

Si ha che

$$(1+s)^p = \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{p}{k} s^k \qquad \text{con} \qquad \binom{p}{k} = \frac{p(p-1)\cdot \ldots \cdot (p-k+1)}{k!}$$

Quindi, posto $F(s) = \frac{1}{2}\left[(1+s)^p + (1-s)^p\right] - \left(1 + s^{p'}\right)^{p-1}$ si ha:

$$\begin{aligned}
F(s) &= \frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{+\infty} \binom{p}{k}\left(s^k - (-s)^k\right)\right) - \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{p-1}{k} s^{p'k} = \\
&= \sum_{j=0}^{+\infty} \binom{p}{2j} s^{2j} - \sum_{j=1}^{+\infty} \binom{p-1}{2j-1} s^{p'(2j-1)} - \sum_{j=0}^{+\infty} \binom{p-1}{2j} s^{p'\cdot 2j} \\
&\quad \text{(il contributo per } j = 0 \text{ si annulla)} \\
&= \binom{p}{0} s^0 - \binom{p}{0} s^0 + \sum_{j=1}^{+\infty} \binom{p}{2j} s^{2j} - \binom{p-1}{2j-1} s^{p'(2j-1)} - \binom{p-1}{2j} s^{p'\cdot 2j} \\
&= \sum_{j=1}^{+\infty} \binom{p}{2j} s^{2j} - \binom{p-1}{2j-1} s^{p'(2j-1)} - \binom{p-1}{2j} s^{p'\cdot 2j}
\end{aligned}$$

Posto $A_j = \binom{p}{2j} s^{2j} - \binom{p-1}{2j-1} s^{p'(2j-1)} - \binom{p-1}{2j} s^{p'\cdot 2j}$ si dimostra che per ogni j si ha che $A_j > 0$.

$$\begin{aligned}
A_j &= \frac{s^{2j}}{(2j-1)!}(2-p)(3-p)\cdot \ldots \cdot (2j-p)\cdot \\
&\qquad \cdot \left[\frac{p(p-1)}{2j(2j-p)} - \frac{p-1}{2j-p} s^{p'(2j-1)-2j} + \frac{p-1}{2j} s^{p'\cdot 2j - 2j}\right]
\end{aligned}$$

Posto $B_j = \frac{s^{2j}}{(2j-1)!}(2-p)(3-p)\cdot \ldots \cdot (2j-p) > 0$ e dal momento che

$$\frac{p(p-1)}{2j(2j-p)} = \frac{p-1}{2j-p} - \frac{p-1}{2j}$$

Si ottiene che

$$\begin{aligned} A_j &= B_j \cdot \left[\left(\frac{p-1}{2j-p} - \frac{p-1}{2j-p} s^{p'(2j-1)-2j} \right) - \left(\frac{p-1}{2j} - \frac{p-1}{2j} s^{p' \cdot 2j - 2j} \right) \right] \\ &= B_j \cdot \left[\frac{1 - s^{p'(2j-1)-2j}}{\frac{2j-p}{p-1}} - \frac{1 - s^{p' \cdot 2j - 2j}}{\frac{2j}{p-1}} \right] \end{aligned}$$

Ora, si hanno le seguenti uguaglianze:

$$\begin{aligned} p'(2j-1) - 2j &= (p'-1)2j - p' = \frac{(p-p+1)2j - p}{p-1} = \frac{2j-p}{p-1} \\ p' \cdot 2j - 2j &= 2j(p'-1) = \frac{2j}{p-1} \end{aligned}$$

Posto $\alpha = \dfrac{2j-p}{p-1}$ e $\beta = \dfrac{2j}{p-1}$ si ottiene che

$$A_j = B_j \cdot \left[\frac{1-s^\alpha}{\alpha} - \frac{1-s^\beta}{\beta} \right]$$

Per il lemma precedente $\dfrac{1-s^x}{x}$ è decrescente e si ha che $\alpha < \beta$, pertanto

$$\frac{1-s^\alpha}{\alpha} - \frac{1-s^\beta}{\beta} > 0$$

Quindi $A_j > 0$ per ogni $j \in \mathbb{N}$. Dunque $F(s) \geq 0$ per ogni $0 < s < 1$ e quindi si ha la tesi. □

Lemma 7.33. *Sia $1 < p \leq 2$, allora $\forall z, w \in \mathbb{R}$ si ha che*

$$\left| \frac{z+w}{2} \right|^{p'} + \left| \frac{z-w}{2} \right|^{p'} \leq \left(\frac{1}{2}|z|^p + \frac{1}{2}|w|^p \right)^{\frac{1}{p-1}}$$

Dimostrazione. Se $z = 0$ vale l'uguaglianza. Analogamente se $w = 0$. Siano dunque $z \neq 0$ e $w \neq 0$, sia $|z| \leq |w|$ e si ponga $r = {}^{|z|}/_{|w|}$ (se accade che $|w| \leq |z|$ si pone $r = {}^{|w|}/_{|z|}$ e la dimostrazione è analoga). Si può supporre inoltre che $\text{sign} z = \text{sign} w$, ed in questo modo $r = {}^{z}/_{w}$.
La disuguaglianza iniziale è pertanto equivalente a:

$$\left| \frac{1+r}{2} \right|^{p'} + \left| \frac{1-r}{2} \right|^{p'} \leq \left(\frac{1}{2} + \frac{r^p}{2} \right)^{\frac{1}{p-1}} \qquad 0 < r \leq 1$$

che è garantita dal lemma precedente. □

Lemma 7.34. *Sia $2 \leq p < +\infty$, allora $\forall z, w \in \mathbb{R}$ si ha che*

$$\left| \frac{z+w}{2} \right|^{p} + \left| \frac{z-w}{2} \right|^{p} \leq \frac{1}{2}|z|^p + \frac{1}{2}|w|^p$$

Dimostrazione. Dal momento che $p \in [2, +\infty)$ allora $p' \in (1, 2]$, quindi dalla disuguaglianza precedente si ottiene che

$$\left|\frac{z+w}{2}\right|^p + \left|\frac{z-w}{2}\right|^p \leq \left(\frac{1}{2}|z|^{p'} + \frac{1}{2}|w|^{p'}\right)^{\frac{1}{p'-1}}$$

Si osserva che si ha

$$p = \frac{p'}{p'-1} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{p'-1} = \frac{p}{p'}$$

Pertanto se $q = {}^{p}/_{p'}$, ricordando che $(a+b)^q \leq 2^{q-1}(a^q + b^q)$

$$\begin{aligned}
\left|\frac{z+w}{2}\right|^p + \left|\frac{z-w}{2}\right|^p &\leq \left(\frac{1}{2}|z|^{p'} + \frac{1}{2}|w|^{p'}\right)^{\frac{1}{p'-1}} \leq \\
&\leq 2^{p/p'-1}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{p/p'}\left(|z|^{p'}\right)^{p/p'} + \left(\frac{1}{2}\right)^{p/p'}\left(|w|^{p'}\right)^{p/p'}\right] = \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^{1-p/p'}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{p/p'}|z|^p + \left(\frac{1}{2}\right)^{p/p'}|w|^p\right] = \\
&= \frac{1}{2}|z|^p + \frac{1}{2}|w|^p
\end{aligned}$$

□

Definizione 7.16. *Uno spazio lineare normato $(\mathbb{X}, \|\cdot\|)$ si dice uniformemente convesso se*

$$\forall \epsilon \in (0, 2] \quad \exists \delta(\epsilon) > 0 : \ \forall x, y \in \mathbb{X} \quad \|x\| = \|y\| = 1$$

$$\|x - y\| \geq \epsilon \quad \Rightarrow \quad \left\|\frac{x+y}{2}\right\| < 1 - \delta$$

($0 < \epsilon \leq 2$ perché la massima distanza tra due punti sulla palla unitaria è 2)

Teorema 7.35. (Disuguaglianze di Clarkson)
Per ogni $u, v \in \mathscr{L}^p$ si ha che:

se $2 \leq p < +\infty$

1) $$\left\|\frac{u+v}{2}\right\|_p^p + \left\|\frac{u-v}{2}\right\|_p^p \leq \frac{1}{2}\|u\|_p^p + \frac{1}{2}\|v\|_p^p$$

2) $$\left\|\frac{u+v}{2}\right\|_p^{p'} + \left\|\frac{u-v}{2}\right\|_p^{p'} \geq \left(\frac{1}{2}\|u\|_p^p + \frac{1}{2}\|v\|_p^p\right)^{p'-1}$$

se $1 < p \leq 2$

3) $$\left\|\frac{u+v}{2}\right\|_p^{p'} + \left\|\frac{u-v}{2}\right\|_p^{p'} \leq \left(\frac{1}{2}\|u\|_p^p + \frac{1}{2}\|v\|_p^p\right)^{p'-1}$$

4) $$\left\|\frac{u+v}{2}\right\|_p^p + \left\|\frac{u-v}{2}\right\|_p^p \geq \frac{1}{2}\|u\|_p^p + \frac{1}{2}\|v\|_p^p$$

Dimostrazione. 1) Segue dal lemma 7.34.

3) Si ha che $p-1 \leq 1$ e l'espressione

$$\|g\|_{p-1} = \left(\int |g|^{p-1} \right)^{1/p-1}$$

in generale non da luogo ad un norma, ma si ha che

$$\left\| |f|^{p'} \right\|_{p-1} = \left(\int |f|^{p'(p-1)} \right)^{1/p-1} = \|f\|_p^{p'}$$

Dunque si ottiene che

$$\left\| \frac{u+v}{2} \right\|_p^{p'} + \left\| \frac{u-v}{2} \right\|_p^{p'} = \left\| \left(\frac{u+v}{2} \right)^{p'} \right\|_{p-1} + \left\| \left(\frac{u-v}{2} \right)^{p'} \right\|_{p-1}$$

Per Minkowsky a rovescio (lemma 7.30) si ha:

$$\leq \left[\int \left(\left| \frac{u+v}{2} \right|^{p'} + \left| \frac{u-v}{2} \right|^{p'} \right)^{p-1} \right]^{1/p-1}$$

Per il lemma precedente si ha che

$$\left| \frac{u+v}{2} \right|^{p'} + \left| \frac{u-v}{2} \right|^{p'} \leq \left(\frac{1}{2}|u|^p + \frac{1}{2}|v|^p \right)^{1/p-1}$$

$$\begin{aligned} \left\| \frac{u+v}{2} \right\|_p^{p'} + \left\| \frac{u-v}{2} \right\|_p^{p'} &\leq \left(\int \frac{1}{2}|u|^p + \frac{1}{2}|v|^p \right)^{1/p-1} \\ &= \left(\frac{1}{2} \|u\|_p^p + \frac{1}{2} \|v\|_p^p \right)^{1/p-1} \end{aligned}$$

e si osserva che $p'-1 = \dfrac{p}{p-1} - 1 = \dfrac{1}{p-1}$.

2) Per la disuguaglianza di Minkowsky si ha che:

$$\begin{aligned} \left\| \frac{u+v}{2} \right\|_p^{p'} + \left\| \frac{u-v}{2} \right\|_p^{p'} &= \left\| \left| \frac{u+v}{2} \right|^{p'} \right\|_{p-1} + \left\| \left| \frac{u-v}{2} \right|^{p'} \right\|_{p-1} \\ &\geq \left\| \left| \frac{u+v}{2} \right|^{p'} + \left| \frac{u-v}{2} \right|^{p'} \right\|_{p-1} \end{aligned}$$

Vale che

$$\left(\left| \frac{u+v}{2} \right|^{p'} + \left| \frac{u-v}{2} \right|^{p'} \right)^{p-1} \geq \frac{1}{2}|u|^p + \frac{1}{2}|v|^p$$

Infatti per il lemma 7.33 per $q \leq 2$:

$$\left| \frac{z+w}{2} \right|^{q'} + \left| \frac{z-w}{2} \right|^{q'} \leq \left(\frac{1}{2}|z|^q + \frac{1}{2}|w|^q \right)^{1/q-1}$$

Si pone $q = p'$ e dunque

$$\left|\frac{z+w}{2}\right|^p + \left|\frac{z-w}{2}\right|^p \le \left(\frac{1}{2}|z|^{p'} + \frac{1}{2}|w|^{p'}\right)^{\frac{1}{p'-1}}$$

Si pone ora $z = \xi + \eta$ e $w = \xi - \eta$

$$|\xi|^p + |\eta|^p \le \left(\frac{1}{2}|\xi+\eta|^{p'} + \frac{1}{2}|\xi-\eta|^{p'}\right)^{\frac{1}{p'-1}}$$

$$\frac{1}{2}|\xi|^p + \frac{1}{2}|\eta|^p \le \left[\left(\frac{1}{2}\right)^{1+(p'-1)}|\xi+\eta|^{p'} + \left(\frac{1}{2}\right)^{1+(p'-1)}|\xi-\eta|^{p'}\right]^{\frac{1}{p'-1}}$$

$$\frac{1}{2}|\xi|^p + \frac{1}{2}|\eta|^p \le \left(\left|\frac{\xi+\eta}{2}\right|^{p'} + \left|\frac{\xi-\eta}{2}\right|^{p'}\right)^{\frac{1}{p'-1}}$$

e poiché $\frac{1}{p'-1} = p-1$ segue la disuguaglianza di Clarkson.

4) Per il lemma 7.33 se $p \le 2$

$$\left|\frac{z+w}{2}\right|^{p'} + \left|\frac{z-w}{2}\right|^{p'} \le \left(\frac{1}{2}|z|^p + \frac{1}{2}|w|^p\right)^{\frac{1}{p-1}}$$

$$\left(\left|\frac{z+w}{2}\right|^{p'} + \left|\frac{z-w}{2}\right|^{p'}\right)^{p-1} \le \frac{1}{2}|z|^p + \frac{1}{2}|w|^p$$

Con la sostituzione $\xi = \dfrac{z+w}{2}$, $\eta = \dfrac{z-w}{2}$ si giunge a

$$\frac{1}{2}\left(|\xi|^p + |\eta|^p\right) \le \left(\left|\frac{\xi+\eta}{2}\right|^p + \left|\frac{\xi-\eta}{2}\right|^p\right)$$

$$\frac{1}{2}\left\|u\right\|_p^p + \frac{1}{2}\left\|v\right\|_p^p \le \left\|\frac{u+v}{2}\right\|_p^p + \left\|\frac{u-v}{2}\right\|_p^p$$

□

Osservazione. *Se $p = 2$ allora $\mathscr{L}^2(\mathbb{X})$ ha la struttura di spazio di Hilbert con il prodotto scalare definito da:*

$$\langle f, g\rangle = \int_{\mathbb{X}} fg$$

Vale dunque l'identità del parallelogramma:

$$\begin{aligned}\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 &= \langle u+v, u+v\rangle + \langle u-v, u-v\rangle = \\ &= 2\big(\|u\|^2 + \|v\|^2\big) = 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2\end{aligned}$$

Per $p = 2$ dunque le disuguaglianze di Clarkson divengono uguaglianze:

$$\left\|\frac{u+v}{2}\right\|^2 + \left\|\frac{u-v}{2}\right\|^2 = \frac{1}{2}\big(\|u\|^2 + \|v\|^2\big)$$

Corollario 7.36. *Se* $1 < p < +\infty$ *la norma* $\|\cdot\|_p$ *su* $\mathscr{L}^p(\mathbb{X})$ *è uniformemente convessa.*

Dimostrazione. Sia $p \geq 2$, siano $\|u\|_p = \|v\|_p = 1$ e sia $\|u-v\|_p \geq \epsilon > 0$.
Per la prima disuguaglianza di Clarkson:

$$\left\|\frac{u+v}{2}\right\|_p^p + \left\|\frac{u-v}{2}\right\|_p^p \leq \frac{1}{2}\|u\|_p^p + \frac{1}{2}\|v\|_p^p = 1$$

$$\left\|\frac{u+v}{2}\right\|_p^p \leq 1 - \frac{1}{2^p}\|u-v\|_p^p \leq 1 - \left(\frac{\epsilon}{2}\right)^p$$

Sia $p \leq 2$, siano $\|u\|_p = \|v\|_p = 1$ e sia $\|u-v\|_p \geq \epsilon > 0$.
Per la terza disuguaglianza di Clarkson:

$$\left\|\frac{u+v}{2}\right\|_p^{p'} + \left\|\frac{u-v}{2}\right\|_p^{p'} \leq \left(\frac{1}{2}\|u\|_p^p + \frac{1}{2}\|v\|_p^p\right)^{p'-1} = 1$$

$$\left\|\frac{u+v}{2}\right\|_p^{p'} \leq 1 - \left\|\frac{u-v}{2}\right\|_p^{p'} \leq 1 - \left(\frac{\epsilon}{2}\right)^{p'}$$

□

Lemma 7.37. *Sia* $1 < p < +\infty$*; se* $L \in (\mathscr{L}^p(\mathbb{X}))^\star$ *e se* $\|L\| = 1$*, allora esiste un unico elemento* $w \in \mathscr{L}^p$ *tale che* $\|w\|_p = 1$ *e* $Lw = 1$.

Dimostrazione. Dal momento che $\|L\| = \sup\limits_{\|w\|=1} \dfrac{\|Lw\|}{\|w\|}$ si ha che esiste una successione $\{w_n\}$ in $\mathscr{L}^p$ tale che $\|w_n\|_p = 1 \ \ \forall n$ ed $Lw_n \to \|L\|$. Si prova che $\{w_n\}$ è di Cauchy.
Sia per assurdo che

$$\exists \epsilon > 0 : \ \ \forall N \in \mathbb{N}, \ \ \exists n, m > N : \quad \|w_n - w_m\|_p \geq \epsilon$$

Allora per l'uniforme convessità della norma p si ha che $\exists \delta(\epsilon) > 0$:

$$\left\|\frac{w_n + w_m}{2}\right\|_p \leq 1 - \delta$$

Si ha che $L\left(\dfrac{w_n + w_m}{\|w_n + w_m\|_p}\right) \leq 1$ perché $\|L\| = 1$.

$$L\left(\frac{w_n + w_m}{\|w_n + w_m\|_p}\right) = \frac{2}{\|w_n + w_m\|_p} L\left(\frac{w_n + w_m}{2}\right) = \frac{1}{\left\|\frac{w_n + w_m}{2}\right\|_p} L\left(\frac{w_n + w_m}{2}\right)$$

$$\frac{1}{\left\|\frac{w_n + w_m}{2}\right\|_p} \geq \frac{1}{1-\delta} \qquad L\left(\frac{w_n + w_m}{2}\right) = \frac{1}{2}\Big(Lw_n + Lw_m\Big) \overset{n,m\to+\infty}{\longrightarrow} 1$$

Quindi, al limite, $1 \geq \dfrac{1}{1-\delta}$, assurdo.
Pertanto per la completezza degli spazi $\mathscr{L}^p$, esiste $w \in \mathscr{L}^p$:

$$w_n \to w \qquad\qquad \|w\|_p = \lim_{n\to+\infty} \|w_n\|_p = 1$$

Dunque w realizza il massimo nella scrittura della norma.
Si dimostra che w è unico utilzzando nuovamente l'uniforme convessità; inoltre, se ve ne fossero due, w e z, la successione che vale alternativamente w e z sarebbe massimizzante, ma non di Cauchy, assurdo. $\square$

Lemma 7.38. *Sia $1 < p < +\infty$; presa $w \in \mathscr{L}^p$ con $\|w\|_p = 1$ esiste un unico $L \in (\mathscr{L}^p(\mathbb{X}))^\star$ tale che $\|L\| = 1$ ed $Lw = 1$.*

Dimostrazione. Si considera

$$v = \begin{cases} \operatorname{sign} w \cdot |w|^{p-1} & \text{se } w \neq 0 \\ 0 & \text{se } w = 0 \end{cases}$$

Sia $Lu = \displaystyle\int_{\mathbb{X}} uv$ per ogni $u \in \mathscr{L}^p$. Allora $\|L\| = \|v\|_{p'} = \|w\|_p^{p/p'} = 1$, infatti:

$$\begin{aligned} \|L\| &= \sup\left\{ |Lu| \,:\, \|u\|_p = 1 \right\} = \\ &= \sup\left\{ \left| \int_{\mathbb{X}} uv \right| \,:\, \|u\|_p = 1 \right\} = \|v\|_{p'} \end{aligned}$$

per la caratterizzazione duale della norma. Si ha inoltre che:

$$Lw = \int_{\mathbb{X}} |w|^p = \|w\|_p^p = 1$$

Dunque in questo modo si dimostra l'esistenza dell'applicazione lineare.
Siano $L_1, L_2 \in (\mathscr{L}^p(\mathbb{X}))^\star$ tali che $\|L_1\| = \|L_2\| = 1$ con $L_1 w = L_2 w = 1$. Se per assurdo $L_1 \neq L_2$, allora esiste $u \in \mathscr{L}^p$ tale che $L_1 u \neq L_2 u$. Deve essere $u \neq 0$ (perché L_1 ed L_2 sono lineari), dunque non è restrittivo supporre che $L_1 u - L_2 u = 2$ (moltiplicando u per un'opportuna costante).
Sia $z = u + \alpha w$, $\alpha \in \mathbb{R}$. $L_1 z = L_1 u + \alpha$. Sia $\alpha = 1 - L_1 u$. Con questa scelta:

$$L_1 z = 1 \qquad L_2 z = L_2 u + \alpha = L_2 u - L_1 u + 1 = -1$$

Sia $t > 0$, allora

$$L_1(w + tz) = 1 + t \qquad\qquad L_2(w - tz) = 1 + t$$

Poiché $\|L_1\| = \|L_2\| = 1$ si ha che

$$1 + t \leq \|w + tz\|_p \qquad\qquad 1 + t \leq \|w - tz\|_p$$

Sia $p \leq 2$; per la quarta disuguaglianza di Clarkson applicata a $w + tz$ e $w - tz$ si ha che:

$$\|w\|_p^p + \|tz\|_p^p \geq \frac{1}{2}\|w + tz\|_p^p + \frac{1}{2}\|w - tz\|_p^p$$
$$1 + t^p \|z\|_p^p \geq (1 + t)^p \qquad \forall t > 0$$

Ora, la funzione $\dfrac{(1+t)^p - 1}{t^p}$ non è limitata per $t \to 0$, e si ha che

$$\frac{(1+t)^p - 1}{t^p} \leq \|z\|_p^p$$

Pertanto dovrebbe essere $\|z\|_p = +\infty$, assurdo, perché $z \in \mathscr{L}^p$.
Per $p \geq 2$ il risultato è analogo. $\square$

Teorema 7.39. (Teorema di rappresentazione di Riesz)

a) Sia $1 < p < +\infty$ *e sia* $(\mathbb{X}, \mathscr{A}, \mu)$ *uno spazio con misura qualunque; allora per ogni* $L \in (\mathscr{L}^p)^\star$ *esiste un unico* $v \in \mathscr{L}^{p'}$ *tale che*

$$Lu = \int_{\mathbb{X}} uv \, \mathrm{d}\mu \qquad \|v\|_{p'} = \|L\|_\star$$

b) Sia $p = 1$ *e sia* $(\mathbb{X}, \mathscr{A}, \mu)$ *uno spazio con misura* σ*-finito; allora vale il medesimo risultato.*

Dimostrazione. a) Se $L = 0$ è ovvio che $v = 0$ dà la rappresentazione. Sia $L \neq 0$, allora non è restrittivo supporre $\|L\| = 1$ (moltiplicando L per una opportuna costante). Per il lemma precedente esiste ed è unico $w \in \mathscr{L}^p$ tale che $\|w\|_p = 1$ ed $Lw = 1$. Si considera pertanto:

$$v = \begin{cases} \operatorname{sign} w \cdot |w|^{p-1} & \text{se } w \neq 0 \\ 0 & \text{se } w = 0 \end{cases}$$

In questo modo:

$$\|v\|_{p'} = \left(\int_{\mathbb{X}} |w|^{p' \cdot (p-1)} \right)^{1/p'} = \left(\int_{\mathbb{X}} |w|^p \right)^{1/p'} = 1$$

Pertanto $v \in \mathscr{L}^{p'}$. Si pone quindi:

$$L_v u = \int_{\mathbb{X}} uv \qquad \forall u \in \mathscr{L}^p$$

Allora $L_v \in \left(\mathscr{L}^p\right)^\star$ e $\|L_v\|_\star = \|v\|_{p'} = 1$ per la caratterizzazione duale della norma, infatti:

$$\begin{aligned} \|L_v\|_\star &= \sup \left\{ |Lu| \,:\, \|u\|_p = 1 \right\} = \\ &= \sup \left\{ \left| \int_{\mathbb{X}} uv \right| \,:\, \|u\|_p = 1 \right\} = \\ &= \|v\|_{p'} \end{aligned}$$

Si ha inoltre che:

$$L_v w = \int_{\mathbb{X}} wv = \int_{\mathbb{X}} |w|^p = 1$$

Allora per il lemma precedente $L = L_v$, quindi v da la rappresentazione di L.
Si prova ora che v è l'unico elemento di $\mathscr{L}^{p'}$ tale che $L = L_v$. Sia $\tilde{v} \in \mathscr{L}^{p'}$ tale che $\|\tilde{v}\|_{p'} = 1$ e che $L_{\tilde{v}} = L = L_v$. Allora $L_{\tilde{v}} - L_v = 0$, quindi:

$$\int_{\mathbb{X}} (\tilde{v} - v)u = 0 \qquad \forall u \in \mathscr{L}^p$$

Ora, si ha che:

$$\|\tilde{v} - v\|_{p'} = \sup \left\{ \int_{\mathbb{X}} (\tilde{v} - v)u \,:\, \|u\|_p = 1 \right\} = 0$$

Pertanto $\tilde{v} = v$.

b) Sia ora $L \in \left(\mathscr{L}^1\right)^\star$ e sia per ora $\mu(\mathbb{X}) < +\infty$. Si fissi $p > 1$ allora, poiché lo spazio ha misura finita, si ha che $\mathscr{L}^p(\mathbb{X}) \subseteq \mathscr{L}^1(\mathbb{X})$, infatti per la disuguaglianza di Hölder

$$\int_{\mathbb{X}} |u| \;\leq\; \mu(\mathbb{X})^{1-1/p} \cdot \left(\int_{\mathbb{X}} |u|^p\right)^{1/p} < +\infty$$

Quindi si ha che se $u \in \mathscr{L}^p(\mathbb{X})$, allora $u \in \mathscr{L}^1(\mathbb{X})$, pertanto è lecito applicare L ad u. Si ottiene dunque che:

$$|Lu| \;\leq\; \|L\|_\star \cdot \|u\|_1 \;\leq\; \|L\|_\star \cdot \mu(\mathbb{X})^{1-1/p} \cdot \|u\|_p$$

Pertanto se $L \in \left(\mathscr{L}^1\right)^\star$, allora $L \in (\mathscr{L}^p)^\star$ per ogni $p > 1$. Per la prima parte del teorema, $\forall p > 1$ esiste un unico $v_p \in \mathscr{L}^{p'}$ tale che

$$Lu = \int v_p \cdot u \qquad \forall u \in \mathscr{L}^p$$

Sia q tale che $1 < q < p$, allora presa una funzione semplice φ qualunque (in questo caso, dal momento che lo spazio ha misura finita, le funzioni semplici appartengono ad ogni $\mathscr{L}^p$)

$$L\varphi = \int v_q \cdot \varphi = \int v_p \cdot \varphi$$

quindi si ottiene che

$$\int_{\mathbb{X}} (v_p - v_q)\varphi = 0 \qquad \forall \varphi \text{ semplice}$$

Pertanto per la caratterizzazione duale della norma q:

$$\|v_p - v_q\|_q = \sup\left\{\int (v_p - v_q)\,\varphi \;:\; \varphi \text{ semplice, } \|\varphi\|_{q'} = 1\right\} = 0$$

Ovvero $v_p = v$, indipendente da p. Si ha che

$$\begin{aligned} \|v\|_\infty &= \sup\left\{\int vg \;:\; \|g\|_1 = 1,\; g \;\text{ semplice}\right\} = \\ &= \sup\left\{Lg \;:\; \|g\|_1 = 1,\; g \;\text{ semplice}\right\} = \|L\|_\star \end{aligned}$$

perchè per funzioni semplici vale che $Lg = \displaystyle\int vg$, ed in questo modo $\|v\|_\infty < +\infty$, quindi si è trovata una rappresentazione di L che si dimostra essere unica analogamente a quanto fatto nella prima parte del teorema. Sia ora $\mathbb{X}$ uno spazio di misura σ-finito, allora esiste $\{X_j\}$ successione di insiemi misurabili disgiunti tali che $\mathbb{X} = \bigcup X_j$ e $\mu(X_j) < +\infty \;\; \forall j \in \mathbb{N}$. Presa $u \in \mathscr{L}^1(X_j)$ si pone

$$E_j(u) = \begin{cases} u & \text{in } X_j \\ 0 & \text{altrove} \end{cases} \qquad E_j : \mathscr{L}^1(X_j) \longrightarrow \mathscr{L}^1(\mathbb{X})$$

E_j è un operatore lineare limitato, infatti $\|E_j(u)\| = \|u\|$. Allora $\forall u \in \mathscr{L}^1(X_j)$ si pone

$$L_j(u) = L\big(E_j(u)\big)$$

ed in questo modo $L_j \in \big(\mathscr{L}^1(X_j)\big)^\star$ con $\|L_j\|_\star \leq \|L\|_\star$. Dunque si ha che per ogni $j \in \mathbb{N}$ esiste un unico $v_j \in \mathscr{L}^\infty(X_j)$ tale che

$$L_j(u) = \int_{X_j} v_j u \qquad \|v_j\|_{\mathscr{L}^\infty(X_j)} = \|L_j\|_\star \leq \|L\|_\star$$

Sia ora $u \in \mathscr{L}^1(\mathbb{X})$, allora

$$u = \sum \mathcal{X}_{X_j} \cdot u$$

$$\begin{aligned} Lu &= \sum L_j(u) = \sum \int_{X_j} v_j \cdot u = \\ &= \int_{\mathbb{X}} \Big(\sum v_j \cdot \mathcal{X}_{X_j}\Big) \cdot u \end{aligned}$$

Si pone dunque $v = \sum v_j \cdot \mathcal{X}_{X_j}$ ed in questo modo si ottiene la rappresentazione di L.

$\square$

7.6 Compattezza per sottoinsiemi di $\mathscr{L}^p\left(\mathbb{R}^n\right)$

Definizione 7.17. *Sia $(\mathbb{X}, d)$ uno spazio metrico; $\mathbb{X}$ si dice compatto se per ogni ricoprimento $\{\mathcal{U}_\alpha\}_{\alpha \in A}$ con aperti $\mathcal{U}_\alpha$, ovvero $\mathbb{X} \subseteq \bigcup_{\alpha \in A} \mathcal{U}_\alpha$ esiste un sottoricoprimento finito, ovvero esistono $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in A$ tali che $\mathbb{X} \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{U}_{\alpha_i}$.*

Definizione 7.18. *Uno spazio metrico $(\mathbb{X}, d)$ si dice compatto per successioni se per ogni successione $\{x_n\}$ in $\mathbb{X}$ esiste una sottosuccessione convergente $\{x_{n_k}\}$, ovvero $x_{n_k} \to x \in \mathbb{X}$.*

Definizione 7.19. *Uno spazio metrico $(\mathbb{X}, d)$ si dice totalmente limitato se $\forall \epsilon > 0$ esistono $x_1, \ldots, x_n$ tali che $\mathbb{X} \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} B_\epsilon(x_i)$; l'insieme dei punti $\{x_1, \ldots, x_n\}$ si chiama ϵ-rete.*

Teorema 7.40. *Sia $(\mathbb{X}, d)$ uno spazio metrico; allora le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

1) $\mathbb{X}$ è compatto

2) $\mathbb{X}$ è compatto per successioni

3) $\mathbb{X}$ è completo e totalmente limitato

Corollario 7.41. *Sia $(\mathbb{X}, d)$ uno spazio metrico completo e sia $\mathbb{Y} \subseteq \mathbb{X}$; allora sono equivalenti:*

1) $\mathbb{Y}$ *è compatto*

2) $\mathbb{Y}$ *è compatto per successioni*

3) $\mathbb{Y}$ *è chiuso e totalmente limitato*

Definizione 7.20. $\mathbb{Y} \subseteq \mathbb{X}$ *si dice relativamente compatto se* $\overline{\mathbb{Y}}$ *è compatto.*

Osservazione. *Sia* $(\mathbb{X}, d)$ *uno spazio metrico completo;* $\mathbb{Y} \subseteq \mathbb{X}$ *è relativamente compatto se e solo se è totalmente limitato.*

Lemma 7.42. *Sia* K *uno spazio metrico compatto; allora* K *è separabile.*

Dimostrazione. Se K è compatto, allora è totalmente limitato. Sia $\epsilon = 1/n$ e per ogni $n \in \mathbb{N}$ sia $\mathscr{S}_n = \left\{x_1^{(n)}, \ldots, x_{m_n}^{(n)}\right\}$ la $1/n$-rete di K. Sia dunque

$$\mathscr{S} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathscr{S}_n$$

Allora $\mathscr{S}$ è numerabile, perchè unione numerabile di insiemi finiti, ed è denso in K. Infatti, sia $x \in K$ e sia $\epsilon > 0$. Sia $n \in \mathbb{N}$ tale che $1/n < \epsilon$; allora esiste $i \in \{1, \ldots, m_n\}$ tale che $d(x, x_i^{(n)}) < 1/n < \epsilon$, dunque $x_i^{(n)} \in B_\epsilon(x)$. □

Teorema 7.43. (Teorema di Ascoli-Arzelà)
Sia K *uno spazio metrico compatto e sia* $C(K)$ *lo spazio delle funzioni reali continue su* K *con la norma:*

$$\|f\| = \max\left\{|f(x)| \,:\, x \in K\right\}$$

Allora $\mathscr{F} \subseteq C(K)$ *è relativamente compatto se e solo se:*

1) le funzioni di $\mathscr{F}$ *sono equilimitate, ovvero*

$$\exists M > 0 : \ \forall f \in \mathscr{F}, \quad \|f\| \le M$$

(ovvero $\mathscr{F}$ *come sottospazio di* $C(K)$ *è limitato)*

2) le funzioni di $\mathscr{F}$ *sono equicontinue, ovvero*

$$\forall \epsilon > 0 \, \exists \, \delta > 0 : \ \forall f \in \mathscr{F} \ \textit{ se } \ d(x,y) < \delta, \ \textit{ allora } \ |f(x) - f(y)| < \epsilon$$

Dimostrazione. Sia $\mathscr{F}$ relativamente compatto, allora $\mathscr{F}$ è totalmente limitato, ovvero $\forall \epsilon > 0$ esistono $f_1, \ldots, f_n \in \mathscr{F}$ tali che $\mathscr{F} \subseteq \bigcup B_\epsilon(f_i)$. Allora $\mathscr{F}$ è limitato, infatti, fissato $\epsilon = 1$, si ha che per ogni $f \in \mathscr{F}$ esiste $i \in \{1, \ldots, n\}$ tale che $\|f - f_i\| \le 1$, dunque

$$\|f\| \le \|f_i\| + 1 \le \max\{\|f_1\|, \ldots, \|f_n\|\} + 1 = M$$

dunque le f sono equilimitate.
Sia $\epsilon > 0$ e sia $\{f_1, \ldots, f_n\}$ la ϵ-rete di $\mathscr{F}$. Poiché le funzioni f_i sono continue su un compatto, esse sono uniformemente continue, allora esiste $\delta(\epsilon) > 0$ tale che se $d(x,y) < \delta(\epsilon)$ si ha $|f_i(x) - f_i(y)| < \epsilon \ \ \forall i \in \{1, \ldots, n\}$ (per ogni f_i si ha un $\delta_i(\epsilon)$, e dunque si considera $\delta(\epsilon) = \min\{\delta_1(\epsilon), \ldots, \delta_n(\epsilon)\}$). Sia $f \in \mathscr{F}$ e sia $i \in \{1, \ldots, n\}$ tale che $\|f - f_i\| < \epsilon$, allora si ha che:

$$|f(x) - f(y)| \le |f(x) - f_i(y)| + |f_i(x) - f_i(y)| + |f(y) - f_i(y)| < 3\epsilon$$

Dunque le f sono equicontinue.
Sia ora che $\mathscr{F}$ verifichi equilimitatezza ed equicontinuità.
Presa $\{f_n\}$ in $\mathscr{F}$ si prova che esiste una sua sottosuccessione che converge in $C(K)$; K è compatto, dunque esso è separabile, ovvero esiste un suo sottinsieme denso e numerabile. Sia $\{x_n\}$ una successione densa in K. Si considera $\{f_n(x_1)\}$, che è una successione di numeri limitata in $\mathbb{R}$, dunque essa ammette una sottosuccessione convergente: sia essa $\{f_{1,n}(x_1)\}$. Allora $\{f_{1,n}(x_2)\}$ è limitata in $\mathbb{R}$ (perchè f_n è limitata), dunque esiste $\{f_{2,n}(x_2)\}$ sottosuccessione convergente. Per ogni k dunque si possono trovare sottosuccessioni $\{f_{k,n}\}$ tali che $\{f_{k,n}\}$ è sottosuccessione di $\{f_{k-1,n}\}$ e che $\{f_{k,n}(x_i)\}$ converge $\forall i \in \{1, \ldots, k\}$.
Si pone $g_n = f_{n,n}$, allora $\{g_n\}$ è sottosuccessione di $\{f_n\}$ e $\{g_n\}$ è sottosuccessione di $\{f_{k,n}\}$ $\forall k \leq n$. Allora $\{g_n(x_i)\}$ converge $\forall i$, quindi $\{g_n\}$ converge su un sottoinsieme denso di K. Si pone

$$f(x_i) = \lim_{x \to +\infty} g_n(x_i) \qquad \forall i \in \mathbb{N}$$

f è uniformemente continua perché limite di funzioni equicontinue e si estende in modo unico a K. Si prova che $g_n \to f$ in $C(K)$: sia $\delta > 0$ e si consideri una δ-rete $\{y_1, \ldots, y_r\}$ di K, allora dal momento che $\{x_n\}$ è densa in K, si ha che esistono $x_{i_1}, \ldots, x_{i_r}$ tali che $\forall j \in \{1, \ldots, n\}$ $x_{i_j} \in B(y_j, \delta)$. In questo modo si è ottenuta una δ-rete di K formata da elementi di $\{x_n\}$.
Sia $k(\delta) = \max\{i_1, \ldots, i_r\}$, allora:

$$\forall \delta > 0 \quad \exists\, k(\delta) \in \mathbb{N} \quad \text{tale che} \quad \forall x \in K, \ \exists\, k \leq k(\delta) \ : \ d(x_k, x) < \delta$$

A questo punto, utilizzando il fatto che sia f che le $\{g_n\}$ sono equicontinue, si ottiene che fissato $x \in K$ e considerata la proprietà di K appena espressa:

$$\begin{aligned} |f(x) - g_n(x)| &\leq |f(x) - f(x_k)| + |f(x_k) - g_n(x_k)| + |g_n(x_k) - g_n(x)| \leq \\ &\leq 2\epsilon + |f(x_k) - g_n(x_k)| \end{aligned}$$

Dal momento che $g_n \to f$, si ha che esiste $N \in \mathbb{N}$ tale che se $n \geq N$ allora

$$|f(x_k) - g_n(x_k)| < \epsilon \qquad \forall k \leq k(\delta)$$

(infatti per ogni $k \leq k(\delta)$ esiste un N_k con questa proprietà, e dunque basta porre $N = \max\{N_k \ : \ k \leq k(\delta)\}$) quindi $|f(x) - g_n(x)| < 3\epsilon$, pertanto $\overline{\mathscr{F}}$ è compatto per successioni, quindi compatto, ovvero $\mathscr{F}$ è relativamente compatto.
□

Teorema 7.44. (Teorema di compattezza di M.Riesz)
Sia $E \subseteq \mathbb{R}^n$ misurabile, sia $1 \leq p < +\infty$. Una famiglia $\mathscr{F} \subseteq \mathscr{L}^p(E)$ è relativamente compatta se e solo se:

1) le funzioni $f \in \mathscr{F}$ sono equilimitate in $\mathscr{L}^p(E)$, ovvero

$$\exists\, M > 0 \ : \quad \|f\|_p \leq M \qquad \forall f \in \mathscr{F}$$

2) le funzioni $f \in \mathscr{F}$ sono equicontinue nel senso di $\mathscr{L}^p$, ovvero

$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists\, \delta > 0 \ : \quad |h| < \delta, \ \int_E |f(x+h) - f(x)|^p \leq \epsilon^p \qquad \forall f \in \mathscr{F}$$

Osserviamo qui che presa $f \in \mathscr{L}^p(E)$, si considera f estesa a 0 fuori da E, in questo modo

$$\mathscr{L}^p(E) \cong \left\{ f \in \mathscr{L}^p(\mathbb{R}^n) \,:\, f \equiv 0 \text{ su } \mathbb{R}^n \setminus E \right\}$$

3) *le funzioni $f \in \mathscr{F}$ sono equiinfinitesime all'infinito nel senso di $\mathscr{L}^p$, ovvero*

$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists\, R > 0 \,:\quad \int_{E \setminus B_R(0)} |f|^p \leq \epsilon^p \qquad \forall f \in \mathscr{F}$$

Dimostrazione. Sia $\mathscr{F}$ relativamente compatto, quindi è totalmente limitato, ovvero

$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists\, f_1, \ldots, f_n \in \mathscr{F} \,:\quad \mathscr{F} \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} B_\epsilon(f_i)$$

Ognuna delle funzioni in $\mathscr{L}^p$ è limitata e continua secondo $\mathscr{L}^p$.

1) Si ha che

$$\exists\, M > 0 \,:\; \|f_i\|_p \leq M \qquad \forall i \in \{1, \ldots, n\}$$

Quindi

$$\forall f \in \mathscr{F} \quad \exists\, i \in \{1, \ldots, n\} \,:\quad \|f - f_i\|_p < \epsilon$$

Pertanto

$$\|f\|_p \,\leq\, \|f_i\|_p + \epsilon \,\leq\, M + \epsilon$$

2) Fissato $\epsilon > 0$ e considerata l'ϵ-rete $\{f_1, \ldots, f_n\}$, si consideri $f \in \mathscr{F}$ e sia $i \in \{1, \ldots, n\}$ tale che $\|f - f_i\| < \epsilon$. Sia $\delta_i > 0$ tale che $\|f_i(\cdot - h) - f_i(\cdot)\|_p^p \leq \epsilon^p$, allora:

$$\begin{aligned} &\|f(x-h) - f(x)\|_p \;\leq \\ &\leq \|f(x-h) - f_i(x-h)\|_p + \|f_i(x-h) - f_i(x)\|_p + \|f_i(x) - f(x)\|_p \leq 3\epsilon \end{aligned}$$

Sia ora $\delta = \min\{\delta_i \,:\, 1 \leq i \leq n\}$, allora in questo modo si ha l'equicontinuità secondo $\mathscr{L}^p$ delle funzioni di $\mathscr{F}$.

3) Fissato $\epsilon > 0$ e presa l'ϵ-rete $\{f_1, \ldots, f_n\}$ si ha che esiste $R > 0$ tale che:

$$\left(\int_{E \setminus B_R(0)} |f_i|^p \right)^{1/p} < \epsilon \qquad \forall i \in \{1, \ldots, n\}$$

Infatti, se si considerano le funzioni $g_n^i = |f_i|^p \cdot \mathcal{X}_{B_n(0)}$ allora si ha che $\left|g_n^i\right| \leq |f_i|^p$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e per ogni $i \in \{1, \ldots, n\}$, dunque per il teorema di convergenza dominata

$$\lim_{n \to +\infty} \int_E g_n^i = \lim_{n \to +\infty} \int_{B_n(0)} |f_i| = \int_E |f_i|^p$$

e quindi preso $\epsilon > 0$ si ha l'esistenza di $R > 0$ che soddisfa la condizione precedente.
Ora, per ogni $f \in \mathscr{F}$ esiste $i \in \{1, \ldots, n\}$ tale che $\|f - f_i\|_p < \epsilon$, dunque:

$$\int_{E \setminus B_R(0)} |f|^p \leq \int_E |f - f_i|^p + \int_{E \setminus B_R(0)} |f_i|^p \leq 2\epsilon^p$$

Pertanto si ha che le funzioni di $\mathscr{F}$ sono equiinfinitesime all'infinito secondo $\mathscr{L}^p$.

Siano ora verificate le tre condizioni dell'ipotesi. Sia $\{\varphi_h\}$ una famiglia di mollificatori e per ogni $f \in \mathscr{F}$ si ponga $f_h = \varphi_h \star f$ (f è estesa a 0 all'esterno di E, perchè il prodotto di convoluzione è definito su tutto $\mathbb{R}^n$).
Preso $\delta(\epsilon)$ il δ della equicontinuità in senso $\mathscr{L}^p$ della condizione 2) si ha che

$$\forall f \in \mathscr{F} \qquad \text{se } |h| < \delta(\epsilon) \quad \text{allora} \quad \|f_h - f\| < \epsilon$$

(f_h è un'approssimazione di f che dipende dal suo modulo di continuità in $\mathscr{L}^p$).
Per la condizione 1) e per la disuguaglianza di Young per convoluzioni si ha che

$$\forall f \in \mathscr{F} \qquad \|f_h\|_p \leq \|\varphi_h\|_1 \cdot \|f\|_p = \|f\|_p \leq M$$

Inoltre fissato h si ha che

$$\|Df_h\|_\infty = \|(D\varphi_h) \star f\|_\infty \leq \|D\varphi_h\|_{p'} \cdot \|f\|_p$$

$\|D\varphi_h\|_{p'} = C(h)$ perchè $D\varphi_h$ è una funzione C^∞ a supporto compatto, pertanto $\|Df_h\|_\infty \leq C(h) \cdot \|f\|_p$, ed analogamente $\|f_h\|_\infty \leq C(h) \cdot M$, quindi queste funzioni sono equilipschitziane, pertanto esse sono equicontinue. Sia $R > 0$ il raggio determinato nella condizione 3) tale che

$$\forall f \in \mathscr{F} \qquad \|f\|_{\mathscr{L}^p\left(E \setminus B_R(0)\right)} < \epsilon$$

Si considera dunque

$$\mathscr{F}_h = \left\{ f_h = \varphi_h \star f_{|\overline{B_R(0)}} \ : \ f \in \mathscr{F} \right\}$$

Alla famiglia $\mathscr{F}_h$ dunque si può applicare il teorema di Ascoli-Arzelà, perchè è formata da funzioni equilimitate ed equicontinue su un compatto, quindi $\mathscr{F}_h$ è relativamente compatto in $C(\overline{B_R(0)})$, pertanto $\mathscr{F}_h$ è totalmente limitato in $C(\overline{B_R(0)})$, ovvero $\forall \eta > 0$ esistono $f_{1h}, \dots, f_{nh} \in \mathscr{F}_h$ tali che $\forall f_h \in \mathscr{F}_h$ esiste $i \in \{1, \dots, n\}$ tale che

$$\max_{\overline{B_R(0)}} \|f_{ih} - f_h\| < \eta$$

Ora, si ha che $\forall i \in \{1, \dots, n\}$ esiste $f_i \in \mathscr{F}$ tale che $f_{ih} = \varphi_h \star (f_i)_{|\overline{B_R(0)}}$, quindi la proposizione precedente può essere riformulata nel seguente modo: per ogni $y > 0$ esistono $f_1, \dots, f_n \in \mathscr{F}$ tali che per ogni $f \in \mathscr{F}$ esiste $i \in \{1, \dots, n\}$ per cui

$$\max_{\overline{B_R(0)}} \|\varphi_h \star f_i - \varphi_h \star f\| < \eta$$

In questo modo

$$\begin{aligned}
\|f - f_i\|_p &\leq \|f - f_i\|_{\mathscr{L}^p\left(B_R(0) \cap E\right)} + \|f - f_i\|_{\mathscr{L}^p\left(E \setminus B_R(0)\right)} \\
&\leq \|f - f_i\|_{\mathscr{L}^p\left(B_R(0) \cap E\right)} + 2\epsilon \\
&\leq \|f - f_h\|_{\mathscr{L}^p\left(B_R(0) \cap E\right)} + \|f_h - f_{ih}\|_{\mathscr{L}^p\left(B_R(0) \cap E\right)} + \\
&\qquad\qquad + \|f_{ih} - f_i\|_{\mathscr{L}^p\left(B_R(0) \cap E\right)} + 2\epsilon \\
&\leq \|f_h - f_{ih}\|_{\mathscr{L}^p\left(B_R(0) \cap E\right)} + 4\epsilon \\
&\leq 4\epsilon + \mu\big(B_R(0)\big)^{1/p} \cdot \|f_h - f_{ih}\|_\infty \leq 4\epsilon + \mu\big(B_R(0)\big)^{1/p} \cdot \eta
\end{aligned}$$

Si sceglie dunque $\eta = \dfrac{\epsilon}{\mu\big(B_R(0)\big)^{1/p}}$, in questo modo $\|f - f_i\|_p < 5\epsilon$, ovvero $\{f_1, \dots, f_n\}$ è una 5ϵ-rete per $\mathscr{F}$, pertanto $\mathscr{F}$ è totalmente limitato, da cui la tesi. $\square$

Osservazione. *Se E è limitato, la condizione 3) del teorema precedente è sempre soddisfatta, quindi superflua.*