ISTITUZIONI DI ANALISI E GEOMETRIA MOD A
ESERCIZI 1

(1) Sia I un intervallo in $\mathbb{R}^2$. Si suddivida I in sottointervalli internamente disgiunti $I_1, \dots, I_M$ tagliando I lungo rette $\alpha_1, \dots, \alpha_N$ parallele agli assi coordinati. Si provi in dettaglio che

$$\ell(I) = \sum_{m=1}^{M} \ell(I_m) \ .$$

(2) Sia $(X, \mathcal{A}, \mu)$ uno spazio con misura. Sia $f : X \to [-\infty, +\infty]$ una funzione misurabile. Per ogni $E \subset \mathbb{R}$, si denota: $f^{-1}(E) = \{x \in X | f(x) \in E\}$.

a) Si provi che $\mathcal{F} = \{E \subset \mathbb{R} | f^{-1}(E) \in \mathcal{A}\}$ è una σ-algebra.

b) Si provi che per ogni $B \subset \mathbb{R}$ Boreliano si ha $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$.

(3) Sia μ^* la misura esterna di Lebesgue su $\mathbb{R}^n$ e sia $(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}, \mu)$ lo spazio con misura di Lebesgue. Per ogni $E \subset \mathbb{R}^n$ si ponga

$$m^e(E) = \inf \{\mu(O) | O \text{ aperto }, E \subset O\} \ ,$$
$$m^i(E) = \sup \{\mu(C) | C \text{ chiuso }, C \subset E\} \ .$$

a) Provare che, per ogni $E \subset \mathbb{R}^n$

$$m^e(E) = \mu^*(E) \ .$$

b) Provare che, se E è limitato, $m^e(E) = m^i(E)$ se e solo se $E \in \mathcal{L}$.