

ISTITUZIONI ANALISI SUP. 1, AA 05/06
PROVA SCRITTA DEL 18/10/05

- (1) Sia $E \subset \mathbb{R}^n$ un insieme misurabile (secondo Lebesgue). Supponiamo che esista $c > 0$ tale che, per ogni intervallo I , valga

$$\mu(E \cap I) \geq c\mu(I) \quad .$$

Provare che $\mu(\mathbb{C}E) = 0$.

- (2) Provare che per ogni $E \subset \mathbb{R}^n$ vale

$$\mu^*(E) = \inf \left\{ \sum_i \lambda(Q_i) \mid Q_i \text{ cubi chiusi t.c. } E \subset \bigcup_i Q_i \right\} \quad .$$

- (3) Poniamo, per ogni $E \subset \mathbb{R}^n$,

$$\text{diam}E = \sup\{|x - y| \mid x, y \in E\} \quad .$$

(i) Provare che esiste $c > 0$ t.c. $\mu^*(E) \leq c(\text{diam}E)^n$, $\forall E \subset \mathbb{R}^n$.
Sia $\Phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ una applicazione tale che $\exists L > 0$ per cui

$$|\Phi(x) - \Phi(y)| \leq L|x - y|, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n \quad .$$

(ii) Provare che se $\mu^*(E) = 0$ allora $\mu^*(\Phi(E)) = 0$.

(iii) Provare che se C è chiuso allora $\Phi(C) \in \mathcal{F}_\sigma$.

(iv) Provare che se E è misurabile allora $\Phi(E)$ è misurabile.