

**ISTITUZIONI DI ANALISI E GEOMETRIA MOD A  
ESERCIZI 1**

- (1) Sia  $I$  un intervallo in  $\mathbb{R}^2$ . Si suddivida  $I$  in sottointervalli internamente disgiunti  $I_1, \dots, I_M$  tagliandolo lungo rette  $\alpha_1, \dots, \alpha_N$  parallele agli assi coordinati. Si provi in dettaglio che

$$\lambda(I) = \sum_{m=1}^M \lambda(I_m) .$$

- (2) Sia  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  uno spazio con misura finito. Presi  $A, B \in \mathcal{A}$  si ponga  $A \sim B$  se  $\mu(A \triangle B) = 0$ .
- a) Si provi che  $\sim$  è una relazione di equivalenza su  $\mathcal{A}$ .
  - b) Posto  $d(A, B) = \mu(A \triangle B)$  per ogni  $A, B \in \mathcal{A}$ , si provi che  $d$  induce una struttura di spazio metrico su  $\mathcal{A}/\sim$ .
- (3) Preso lo spazio con misura di Lebesgue  $(\mathbb{R}, \mathcal{L}, \mu)$  provare che per ogni  $E \in \mathcal{L}$  tale che  $\mu(E) > 0$  esiste  $G \subset E$  tale che  $G \notin \mathcal{L}$ . Suggerimento: Osservare che a meno di una traslazione di  $E$  si può supporre  $\mu((E \cap [0, 1])) > 0$ .