

ISTITUZIONI DI ANALISI E GEOMETRIA MOD A
AA 2011/12
ESERCIZI FOGLIO N. 1 CON SOLUZIONI

Questi esercizi possono essere risolti in vari modi, tutti corretti. Qui di seguito sono indicate alcune tra le soluzioni più brevi.

- (1) Provare che per ogni $E \subset \mathbb{R}^n$ vale

$$\mu^*(E) = \inf \left\{ \sum \lambda(I_k) \mid E \subset \cup I_k, I_k \text{ intervalli chiusi e limitati} \right\} .$$

Sol.: Scomponendo \mathbb{R}^n in cubi di lato 1 internamente disgiunti, segue che nella definizione di misura esterna è sufficiente far ricorso a intervalli limitati. Se poi si prende un qualunque ricoprimento con intervalli di E le chiusure di questi intervalli ricoprono ancora E e le lunghezze non cambiano.

- (2) Sia $E \subset \mathbb{R}^n$ tale che, per ogni $\varepsilon > 0$ esistono insiemi di Lebesgue A, B tali che $A \subset E \subset B$ e

$$\mu^*(B \setminus A) < \varepsilon .$$

Provare che E è di Lebesgue.

Sol.: Si prende $\varepsilon = \frac{1}{m}$ con m naturale qualunque e si considerano $A_m, B_m \in \mathcal{L}$ tali che $A_m \subset E \subset B_m$ e

$$\mu^*(B_m \setminus A_m) < \frac{1}{m} .$$

Poniamo $A = \cup_m A_m, B = \cap_m B_m$, questi sono insiemi di Lebesgue e vale $A \subset E \subset B$ e

$$\mu^*(B \setminus A) = 0 .$$

Posto $C = E \setminus A$ risulta $\mu^*(C) = 0$ quindi di Lebesgue, e $E = A \cup C \in \mathcal{L}$.

- (3) Siano I, J due intervalli disgiunti. Siano A, B due insiemi qualunque tali che $A \subset I, B \subset J$, provare che vale

$$\mu^*(A \cup B) = \mu^*(A) + \mu^*(B) .$$

Sol.: Si consideri $C = A \cup B$, si ha $A = C \cap I, B = C \setminus I$, la tesi segue dalla misurabilità di I . In alternativa, preso un qualunque ricoprimento con intervalli $\{I_k\}$ di $A \cup B$ se ne trova un altro fatto dalle successioni di intervalli $\{I_k \cap I\}, \{I_k \cap J\}$

la cui somma delle lunghezze non aumenta. Da qui segue la disuguaglianza

$$\mu^*(A \cup B) \geq \mu^*(A) + \mu^*(B) .$$