

**ISTITUZIONI DI ANALISI SUPERIORE 1, AA 04/05**  
**TEST N. 2 DEL 01/12/04**

E' fissato uno spazio con misura  $(X, \mathcal{A}, \mu)$ , ci si riferisce nel seguito a insiemi e funzioni misurabili rispetto a tale spazio. Presi  $A$  e  $B$  insiemi misurabili, si indica  $d(A, B) = \mu(A \Delta B)$ .

- (1) Sia  $\{A_n\}$  una successione di insiemi misurabili tali che la successione di funzioni caratteristiche  $\chi_{A_n}$  converge in misura ad una funzione misurabile  $f$ . Provare che esiste un insieme misurabile  $A$  tale che  $f = \chi_A$  quasi ovunque.
- (2) Sia  $\{A_n\}$  una successione di insiemi misurabili tali che  $\forall \epsilon > 0, \exists N$  tale che  $d(A_n, A_m) < \epsilon \forall n, m \geq N$ . Provare che esiste una sottosuccessione  $\{A_{n_k}\}$  e un insieme misurabile  $A$  tali che

$$\lim_{k \rightarrow \infty} d(A_{n_k}, A) = 0 \quad .$$

- (3) Sia  $\{f_n\}$  una successione di funzioni misurabili nonnegative, e sia  $f$  misurabile, tali che

$$f_n \rightarrow f \text{ in misura,}$$

supponiamo anche che esista

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n \quad .$$

Provare che

$$\int f \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n \quad .$$

- (4) Sia  $f$  integrabile e sia  $\{\phi_n\}$  una successione di funzioni misurabili tale che, per ogni  $n$ ,  $|\phi_n| \leq 1$  quasi ovunque e anche che valga  $\lim_{n \rightarrow \infty} \phi_n = 0$  quasi ovunque. Provare che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f \phi_n = 0 \quad .$$