

ISTITUZIONI DI ANALISI E GEOMETRIA MOD A
PROVA SCRITTA DEL 23 GENNAIO 2012

- (1) Sia $f \geq 0$ una funzione integrabile su uno spazio con misura (X, \mathcal{A}, μ) . Per ogni $E \in \mathcal{A}$ si ponga

$$\nu(E) = \int_E f d\mu .$$

Provare che:

- (i) ν è una misura finita.
- (ii) Se vale $\nu(E) \leq \mu(E)$ per ogni $E \in \mathcal{A}$, allora si ha

$$\|f\|_\infty \leq 1 .$$

- (iii) Se, per un dato δ , $0 < \delta < 1$ vale $\nu(E) \leq \mu(E)^{1-\delta}$ per ogni $E \in \mathcal{A}$, allora $f \in L^p$ per ogni $p < \frac{1}{\delta}$.

- (2) Sia $1 < p < \infty$ e sia q l'esponente coniugato. Siano $f \in L^p(\mathbb{R}^n), g \in L^q(\mathbb{R}^n)$.

- (i) Provare che

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f * g(x) = 0 .$$

- (ii) Stabilire se la stessa cosa vale nel caso $p = 1, q = \infty$.

- (3) Per ogni $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ si indichi con ω_f il modulo di continuità in L^1 per f . Siano $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ tali che $\|f\|_1, \|g\|_1 \leq 1$. Posto $h = f * g$ provare che

$$\omega_h \leq \min \{ \omega_f, \omega_g \} .$$