

ISTITUZIONI ANALISI E GEOMETRIA MOD. A, AA 14/15
ESERCIZI DEL 3/12/14

- (1) Siano $f, g, f_k, k = 1, 2, \dots$ funzioni misurabili quasi ovunque finite su uno spazio con misura $\{X, \mathcal{A}, \mu\}$. Si abbia che $f_k \rightarrow f$ in misura.
 (a) Provare che, se $\mu\{g \neq 0\} < \infty$, allora $gf_k \rightarrow gf$ in misura.
 (b) Dare un controesempio nel caso $\mu\{g \neq 0\} = \infty$.
- (2) Sia $\{X, \mathcal{A}, \mu\}$ uno spazio con misura completo e σ -finito. Sia f una funzione nonnegativa e integrabile su X . Provare che

$$\int_X \frac{f(x)}{1+f(x)} d\mu(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t)^2} \mu_f(t) dt$$

dove

$$\mu_f(t) = \mu\{f > t\}, \quad \forall t \geq 0.$$

- (3) Sia $\{X, \mathcal{A}, \mu\}$ uno spazio con misura e siano f e $\{f_n\}$ una funzione e una successione di funzioni misurabili su X tali che

$$\int_X |f_n - f| d\mu \rightarrow 0 \text{ per } n \rightarrow \infty.$$

Provare che $f_n \rightarrow f$ in misura. Dare un esempio in cui $f_n \not\rightarrow f$ quasi ovunque.

- (4) Siano f, g funzioni misurabili su $\{X, \mathcal{A}, \mu\}$ tali che f^2, g^2 sono integrabili. Posto $F(t) = \int_X (f + tg)^2 d\mu, t \in \mathbb{R}$, provare che F è derivabile e calcolare $\frac{d}{dt} F(0)$.