

ISTITUZIONI DI ANALISI E GEOMETRIA MOD A
PROVA SCRITTA DEL 10/09/12

- (1) Stabilire se esiste ed eventualmente calcolare

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{(0, +\infty)} \frac{e^{-x^2}}{1 + (x - n)^2} dx .$$

- (2) Sia (X, \mathcal{A}, μ) uno spazio con misura finito. Sia f una funzione misurabile nonnegativa su X . Sia $1 < p < \infty$ e sia p' il suo esponente coniugato. Si ponga

$$\nu(E) = \int_E f d\mu, \forall E \in \mathcal{A} .$$

Provare:

- (a) se $f \in L^p(X)$, allora

$$\nu(E) \leq \mu(E)^{\frac{1}{p'}} \|f\|_p, \forall E \in \mathcal{A} ,$$

- (b) se vale

$$\nu(E) \leq \mu(E)^{\frac{1}{p'}}, \forall E \in \mathcal{A} ,$$

allora $f \in L^q(X)$ per ogni $q < p$.

- (3) Si ponga $\mathbb{R}_+^2 = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 | u, v > 0\}$. Sia f integrabile su \mathbb{R}_+^2 . Stabilire se la funzione

$$f(e^{x+y}, e^{y-x})e^{2y}$$

è integrabile su \mathbb{R}^2 .