

ISTITUZIONI DI ANALISI SUPERIORE 1, AA 08/09
TEST N. 1 DEL 20/10/08

- (1) Una funzione $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ si dice *semicontinua inferiormente* (*sci*) nel punto $x_0 \in \mathbb{R}^n$ se

$$f(x_0) \leq \liminf_{x \rightarrow x_0} f(x) .$$

(qui si intende: $\liminf_{x \rightarrow x_0} f(x) = \sup_{r>0} \inf_{0<|x-x_0|<r} f(x)$).

- (a) Provare che f è *sci* in ogni punto se e solo se, per ogni $a \in \mathbb{R}$, l'insieme

$$\{x \in \mathbb{R}^n | f(x) > a\}$$

è aperto.

- (b) Presa $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ qualunque, e posto

$$f(x) = \sup\{g(y) | y \in \mathbb{R}^n, |y - x| < 1\} , \forall x \in \mathbb{R}^n ,$$

provare che f è *sci* in ogni punto.

- (2) Sia $\alpha > 0$ e si ponga per ogni $A \subset \mathbb{R}^n$

$$\mu_\alpha(A) = \inf\left\{\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda(I_k))^\alpha \mid \{I_k\} \text{ successione di intervalli t.c. } A \subset \cup_k I_k\right\} .$$

- (a) Provare che μ_α è una misura esterna.

- (b) Provare che , se $\alpha > 1$, allora $\mu_\alpha(A) = 0$ pe ogni A .

- (3) Una misura esterna μ^* su X si dice *regolare* se per ogni $A \subset X$ esiste un insieme E μ^* -misurabile tale che $A \subset E$ e $\mu^*(A) = \mu^*(E)$.

- (a) Sia data una misura esterna μ^* su X . Sia \mathcal{A} la σ -algebra degli insiemi μ^* -misurabili e sia $\mu = \mu^*|_{\mathcal{A}}$. Sia $\tilde{\mu}$ la misura esterna indotta da μ , come misura sull'algebra \mathcal{A} . Provare che, se μ^* è regolare allora $\tilde{\mu} = \mu^*$.

- (b) Provare che, se μ^* è la misura esterna indotta da una misura ν su un'algebra \mathcal{B} , allora è regolare.