

**ISTITUZIONI DI ANALISI E GEOMETRIA MOD A**  
**PROVA SCRITTA DEL 22/01/13**

- (1) Sia  $U$  un intorno aperto e limitato di  $0$  in  $\mathbb{R}^n$ . Si indichi, per ogni  $t > 0$  e per ogni  $y \in \mathbb{R}^n$ ,  $U_t(y) = \{tx + y | x \in U\}$  e si ponga

$$\mathcal{F} = \{U_t(y) | t > 0, y \in \mathbb{R}^n\} .$$

a) Posto

$$Q_s(y) = \{x \in \mathbb{R}^n | |x_i - y_i| < s, i = 1, \dots, n\}$$

il cubo di centro  $y$  e semilato  $s$ , provare che esistono  $r, R > 0$  tali che, per ogni  $U_t(y) \in \mathcal{F}$  si ha

$$Q_{rt}(y) \subset U_t(y) \subset Q_{Rt}(y) .$$

b) Sia  $E \subset \mathbb{R}^n$ , provare che  $\mu^*(E) = 0$  se e solo se

$$\inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \mu(U_{t_i}(y_i)) | U_{t_i}(y_i) \in \mathcal{F}, E \subset \cup_{i=1}^{\infty} U_{t_i}(y_i) \right\} = 0 .$$

- (2) Sia  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  uno spazio con misura. Sia  $\{f_k\}$  una successione di funzioni misurabili su  $X$  tale che

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_X \left( e^{f_k^2} - 1 \right) d\mu = 0 .$$

a) Provare che  $f_k \rightarrow 0$  in  $L^p$  per ogni  $p \in [2, \infty)$ .

b) Dare un esempio (di spazio  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  e di successione  $\{f_k\}$ ) per cui  $f_k \not\rightarrow 0$  in  $L^1$ .

- (3) Fissato  $p \in [1, \infty)$ , per ogni  $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$  sia  $\omega_f$  il modulo di continuità in  $L^p$  di  $f$ , cioè:

$$\omega_f(t) = \sup \{ \|f(\cdot - y) - f(\cdot)\|_p | |y| < t \} , \forall t > 0 .$$

Prese  $f \in L^p(\mathbb{R}^n), g \in L^1(\mathbb{R}^n)$  e posta  $h = f * g$  provare che

$$\omega_h \leq \omega_f \|g\|_1 .$$