

ISTITUZIONI DI ANALISI E GEOMETRIA MOD A
PROVA SCRITTA DEL 9/6/14

- (1) Sia $F \in L^1(\mathbb{R}^2)$ tale che

$$\int_{\mathbb{R} \times (0, +\infty)} F(u, v) d\mu(u, v) = a ,$$

e

$$\int_{\mathbb{R} \times (-\infty, 0)} F(u, v) d\mu(u, v) = b ,$$

stabilire se esiste finito e, in tal caso, calcolare

$$\int_E F(e^x \cos y, e^x \sin y) e^{2x} d\mu(x, y) ,$$

nei seguenti due casi

a) $E = \mathbb{R} \times (0, 2\pi)$,

b) $E = \mathbb{R} \times (0, 3\pi)$.

- (2) Sia $f \in L^2(\mathbb{R})$, calcolare, se esiste,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} f(x) f(x+k) d\mu(x) .$$

- (3) Sia $f \in L^1(\mathbb{R})$, $f \geq 0$. Sia $\{a_k\}$ una successione di numeri positivi. Posto $f_k(x) = f(a_k x)$ per ogni $k = 1, 2, \dots$, si definisca per induzione

$$F_1 = f_1 ,$$

$$F_{k+1} = f_{k+1} * F_k , k = 1, 2, \dots .$$

Calcolare

$$\int_{\mathbb{R}} F_k , \text{ per ogni } k = 1, 2, \dots .$$