

**ISTITUZIONI DI ANALISI E GEOMETRIA MOD A**  
**AA 2011/12**  
**SOLUZIONI ESERCIZI FOGLIO N. 2**

- (1) Sia  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  uno spazio con misura. Sia  $F = (f_1, \dots, f_n)$  una applicazione da  $X$  in  $\mathbb{R}^n$ . Provare che le funzioni  $f_1, \dots, f_n$  sono misurabili se e solo se per ogni aperto  $A \subset \mathbb{R}^n$  l'insieme  $F^{-1}(A)$  è misurabile.

**Soluzione:** Supponiamo  $f_1, \dots, f_n$  misurabili, se  $A \subset \mathbb{R}^n$  è aperto, allora è unione numerabile di intervalli aperti  $I_k = \prod_{i=1}^n (a_i^k, b_i^k)$ . Segue  $F^{-1}(A) = \cup_k \cap_i \{a_i^k < f_i < b_i^k\} \in \mathcal{A}$ . Viceversa, per ogni  $t \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, n$ , e posto  $A = \{x \in \mathbb{R}^n | x_i > t\}$  risulta  $\{f_i > t\} = F^{-1}(A)$ .

- (2) Sia  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  tale che  $f$  è continua in  $x$  per quasi ogni punto  $x \in [0, 1]$ . Provare che  $f$  è misurabile.

**Soluzione:** Sia  $F$  misurabile in  $[0, 1]$  tale che  $\mu(F) = 0$  e  $f$  è continua su  $E = [0, 1] \setminus F$ . Allora per ogni aperto  $A \subset \mathbb{R}$   $f^{-1}(A) \cap E$  è aperto nella topologia relativa di  $E$ , cioè esiste  $B$  aperto di  $[0, 1]$  tale che  $f^{-1}(A) \cap E = B \cap E$  che è misurabile. D'altra parte,  $f^{-1}(A) \setminus E = f^{-1}(A) \cap F \subset F$  è un sottoinsieme di un insieme di misura nulla quindi misurabile.

**Strada alternativa (traccia):** Si introducono

$$\underline{f} = \sup \{ \varphi | \varphi \text{ a scalino} \leq f \}$$

e

$$\overline{f} = \inf \{ \psi | \psi \text{ a scalino} \geq f \}$$

e si verifica che  $\underline{f}(x) = f(x) = \overline{f}(x)$  in ogni  $x$  punto di continuità di  $f$ . Se ne deduce  $f = \underline{f}$  q.o., da cui la misurabilità. (N.B.: questo argomento può essere usato per dimostrare il criterio di Lebesgue per l'integrabilità secondo Riemann.)

- (3) Sia  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  uno spazio con misura e siano  $f, f_n, n = 1, 2, \dots$  funzioni misurabili tali che  $f_n \rightarrow f$  in misura. Provare che  $|f_n| \rightarrow |f|$  in misura.

**Soluzione:** Per la disuguaglianza triangolare per il valore assoluto, vale

$$||f_n| - |f|| \leq |f_n - f| ,$$

quindi per ogni  $\varepsilon > 0$  si ha

$$\{||f_n| - |f|| > \varepsilon\} \subset \{|f_n - f| > \varepsilon\} ,$$

da cui, per  $n \rightarrow \infty$ ,

$$\mu(\{||f_n| - |f|| > \varepsilon\}) \leq \mu(\{|f_n - f| > \varepsilon\}) \rightarrow 0 .$$