

**ISTITUZIONI DI ANALISI E GEOMETRIA MOD A**  
**PROVA SCRITTA DEL 08/09/14**

- (1) Siano  $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ , tali che  $\int_{\mathbb{R}} f = \int_{\mathbb{R}} g = 1$ . Posto

$$F(x, y) = f(x - 2y)g(x + 3y)$$

stabilire se  $F$  è integrabile su  $\mathbb{R}^2$ , e se sì, calcolarne l'integrale.

- (2) Sia  $\mu^*$  la misura esterna di Lebesgue su  $\mathbb{R}^n$ . Provare che per ogni  $E \subset \mathbb{R}^n$  vale

$$\mu^*(E) = \inf \{ \mu^*(A) \mid A \text{ aperto}, A \supset E \} .$$

Provare inoltre che  $E$  è misurabile se e solo se

$$\inf \{ \mu^*(A \setminus E) \mid A \text{ aperto}, A \supset E \} = 0 .$$

- (3) Sia  $\{f_n\}$  una successione di funzioni misurabili q.o. finite su uno spazio con misura  $(X, \mathcal{A}, \mu)$ , tale che  $f_n \rightarrow f$  in misura, con  $f$  misurabile q.o. finita. Sia  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione tale che  $|F(t) - F(s)| \leq \sqrt{|t - s|}$  per ogni  $t, s \in \mathbb{R}$ . Stabilire se

$$F(f_n) \rightarrow F(f) \text{ in misura} .$$