

ISTITUZIONI DI ANALISI E GEOMETRIA MOD A
PROVA SCRITTA DEL 22/01/13

- (1) Sia U un intorno aperto e limitato di 0 in \mathbb{R}^n . Si indichi, per ogni $t > 0$ e per ogni $y \in \mathbb{R}^n$, $U_t(y) = \{tx + y | x \in U\}$ e si ponga

$$\mathcal{F} = \{U_t(y) | t > 0, y \in \mathbb{R}^n\} .$$

a) Posto

$$Q_s(y) = \{x \in \mathbb{R}^n | |x_i - y_i| < s, i = 1, \dots, n\}$$

il cubo di centro y e semilato s , provare che esistono $r, R > 0$ tali che, per ogni $U_t(y) \in \mathcal{F}$ si ha

$$Q_{rt}(y) \subset U_t(y) \subset Q_{Rt}(y) .$$

b) Sia $E \subset \mathbb{R}^n$, provare che $\mu^*(E) = 0$ se e solo se

$$\inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \mu(U_{t_i}(y_i)) | U_{t_i}(y_i) \in \mathcal{F}, E \subset \cup_{i=1}^{\infty} U_{t_i}(y_i) \right\} = 0 .$$

Soluzione: a) 0 è un punto interno di U quindi esiste $r > 0$ t.c. $Q_r(0) \subset U$, essendo poi U limitato esiste $R > 0$ t.c. $U \subset Q_R(0)$, applicando una traslazione e una dilatazione segue

$$Q_{rt}(y) \subset U_t(y) \subset Q_{Rt}(y) \quad \forall t > 0, \forall y \in \mathbb{R}^n .$$

b) Sia $\mu^*(E) = 0$, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste O aperto tale che $E \subset O$ e $\mu(O) < \varepsilon$. O è unione numerabile di cubi internamente disgiunti $Q_{s_i}(y_i)$, quindi $\sum_{i=1}^{\infty} \mu(Q_{s_i}(y_i)) < \varepsilon$. Si ponga $t_i = s_i/r$, quindi

$$Q_{s_i}(y_i) \subset U_{t_i}(y_i) \subset Q_{Rt_i}(y_i) .$$

Ora $\mu(U_{t_i}(y_i)) \leq \mu(Q_{Rt_i}(y_i)) = (R/r)^n \mu(Q_{s_i}(y_i))$, da cui

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mu(U_{t_i}(y_i)) \leq (R/r)^n \varepsilon ,$$

e la tesi segue per l'arbitrarietà di ε .

Viceversa, supponiamo

$$\inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \mu(U_{t_i}(y_i)) | U_{t_i}(y_i) \in \mathcal{F}, E \subset \cup_{i=1}^{\infty} U_{t_i}(y_i) \right\} = 0$$

quindi, per ogni $\varepsilon > 0$ si trovano $U_{t_i}(y_i) \in \mathcal{F}$ t.c. $E \subset \cup_{i=1}^{\infty} U_{t_i}(y_i)$ e $\sum_{i=1}^{\infty} \mu(U_{t_i}(y_i)) < \varepsilon$. Allora

$$E \subset \cup_{i=1}^{\infty} Q_{Rt_i}(y_i)$$

e

$$\mu(Q_{Rt_i}(y_i)) = (R/r)^n \mu(Q_{rt_i}(y_i)) \leq (R/r)^n \mu(U_{t_i}(y_i)) .$$

Ne segue $\mu^*(E) \leq (R/r)^n \varepsilon$.

- (2) Sia (X, \mathcal{A}, μ) uno spazio con misura. Sia $\{f_k\}$ una successione di funzioni misurabili su X tale che

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_X (e^{f_k^2} - 1) d\mu = 0 .$$

a) Provare che $f_k \rightarrow 0$ in L^p per ogni $p \in [2, \infty)$.

b) Dare un esempio (di spazio (X, \mathcal{A}, μ) e di successione $\{f_k\}$) per cui $f_k \not\rightarrow 0$ in L^1 .

Soluzione: a)

$$e^x - 1 \geq \frac{x^n}{n!} \quad \forall x \geq 0 ,$$

Quindi

$$\int_X |f_k|^{2n} d\mu \leq n! \int_X (e^{f_k^2} - 1) d\mu \rightarrow 0 \quad \forall n = 1, 2, \dots ,$$

cioè: $\|f_k\|_{2n} \rightarrow 0$ per ogni $n = 1, 2, \dots$. Preso $p > 2$ e preso n t.c. $2n < p \leq 2(n+1)$ la tesi segue per la disuguaglianza interpolatoria tra norme p .

b) $X = \mathbb{R}$ con la misura di Lebesgue, e $f_k(x) = \chi_{(k, +\infty)}(x)/x$. Si ha $\int_X |f_k| d\mu = \infty$ per ogni k , ma

$$\int_X (e^{f_k^2} - 1) d\mu = \int_{(k, +\infty)} (e^{x^{-2}} - 1) d\mu(x) \rightarrow 0 ,$$

dato che $(e^{x^{-2}} - 1)$ è integrabile su $[1, +\infty)$.

- (3) Fissato $p \in [1, \infty)$, per ogni $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ sia ω_f il modulo di continuità in L^p di f , cioè:

$$\omega_f(t) = \sup \{ \|f(\cdot - y) - f(\cdot)\|_p \mid |y| < t \} , \quad \forall t > 0 .$$

Prese $f \in L^p(\mathbb{R}^n), g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e posta $h = f * g$ provare che

$$\omega_h \leq \omega_f \|g\|_1 .$$

Soluzione: Si applica la disuguaglianza di Young per convoluzioni al prodotto

$$(f(\cdot - y) - f(\cdot)) * g .$$