

**ISTITUZIONI DI ANALISI E GEOMETRIA,
MOD. A
SCRITTO DEL 10/11/15**

- (1) Sia $\{f_n\}$ una successione di funzioni misurabili su uno spazio con misura (X, \mathcal{A}, μ) . Supponiamo che

$$f_n \rightarrow f \text{ in misura}$$

e che per qualche $p \in [1, \infty)$

$$\|f_n\|_p \leq 10 \text{ per ogni } n .$$

Provare che $f \in L^p(X)$.

- (2) Sia dato uno spazio con misura (X, \mathcal{A}, μ) . Sia $\{E_n\}$ una successione di insiemi misurabili di misura finita tali che

$$\mu(E_n \triangle E_m) \rightarrow 0 , \text{ per } n, m \rightarrow \infty .$$

Provare che esiste E misurabile di misura finita tale che

$$\|\chi_{E_n} - \chi_E\|_1 \rightarrow 0 , \text{ per } n \rightarrow \infty .$$

- (3) Sia dato uno spazio con misura (X, \mathcal{A}, μ) . Siano f_k, g_k funzioni misurabili quasi ovunque finite, $k = 1, 2, \dots$. Supponiamo $f_k \rightarrow 0$ e $g_k \rightarrow 0$ in misura. Provare che $f_k |g_k|^3 \rightarrow 0$ in misura.