

ISTITUZIONI DI ANALISI E GEOMETRIA MOD A
PROVA SCRITTA DEL 16/2/15

- (1) Sia (X, \mathcal{A}, μ) uno spazio con misura. Sia p tale che $2 \leq p < \infty$. Siano $f, g \in L^p(X)$ due elementi distinti tali che $\|f\|_p = \|g\|_p = 1$. Si ponga

$$\Phi(t) = \int_X |tf + (1-t)g|^p d\mu, \quad t \in [0, 1] .$$

Studiare la funzione Φ e dimostrare che

$$\Phi(t) < 1, \quad \forall t \in (0, 1) .$$

Sol.: Si può usare due volte il teorema di derivazione sotto il segno di integrale e ricavare che $\Phi''(t) > 0$ per ogni $t \in (0, 1/2) \cup (1/2, 1)$ e $\Phi''(1/2) \geq 0$, quindi Φ è strettamente convessa, e di conseguenza

$$\Phi(t) < t\Phi(1) + (1-t)\Phi(0) = 1, \quad \forall t \in (0, 1) .$$

- (2) Siano $p, q \geq 1$ tali che $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \leq 1$, siano $f \in L^p(\mathbb{R}), g \in L^q(\mathbb{R})$, determinare, se esiste, un esponente $r \geq 1$ tale che $fg \in L^r(\mathbb{R})$.

Sol.: Si usa la disuguaglianza di Hölder per $|fg|^r$ con r da determinare:

$$\int_{\mathbb{R}} |fg|^r \leq \left(\int_{\mathbb{R}} |f|^{rs} \right)^{1/s} \left(\int_{\mathbb{R}} |g|^{rt} \right)^{1/t}$$

dove s, t sono coniugati. Si cercano r, s, t di modo che $rs = p$, $rt = q$, si ricava che r è determinato da $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$.

- (3) Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{[0,1]} \frac{x^n + 1}{x^n + 2} d\mu(x) .$$

Sol.: Per il teorema della convergenza dominata si ricava

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{[0,1]} \frac{x^n + 1}{x^n + 2} d\mu(x) = \frac{1}{2} .$$