

**ISTITUZIONI DI ANALISI E GEOMETRIA MOD A**  
**AA 2012/13**  
**ESERCIZI FOGLIO N.3**

- (1) Sia  $\mu_n^*$  la misura esterna di Lebesgue su  $\mathbb{R}^n$ , si indichi rispettivamente con  $\mathcal{L}^n, \mu_n$  la  $\sigma$ -algebra degli insiemi di Lebesgue e la misura di Lebesgue su  $\mathbb{R}^n$ ,  $n = 1, 2, \dots$

(a) Presi  $A \subset \mathbb{R}^n, B \subset \mathbb{R}^m$  aperti non vuoti, provare che

$$\mu_{n+m}(A \times B) = \mu_n(A)\mu_m(B) .$$

(b) Presi  $A \in \mathcal{L}^n, B \in \mathcal{L}^m$  tali che  $\mu_n(A) < \infty, \mu_m(B) < \infty$ , provare che

$$\mu_{n+m}^*(A \times B) = \mu_n(A)\mu_m(B) .$$

- (2) Sia  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione limitata e siano  $\underline{f}, \bar{f}$  date da:

$$\underline{f}(x) = \sup \{ \varphi(x) | \varphi \text{ a scalino } \varphi \leq f \} , \forall x \in [a, b] ,$$

$$\bar{f}(x) = \inf \{ \psi(x) | \psi \text{ a scalino } \psi \geq f \} , \forall x \in [a, b] .$$

Provare che se  $f$  è continua in  $x_0 \in [a, b]$  allora  $\underline{f}(x_0) = \bar{f}(x_0)$ .

- (3) Sia  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione limitata. Si ricorda che  $f$  si dice semicontinua inferiormente in  $x_0 \in [a, b]$  se

$$\liminf_{x \rightarrow x_0} f(x) \geq f(x_0) .$$

Supponiamo che  $f$  sia tale che esiste una successione di funzioni a scalino  $\{\varphi_k\}$  per cui

$$f(x) = \sup \{ \varphi_k(x) | k = 1, 2, \dots \} , \forall x \in [a, b] .$$

Provare che esiste un insieme  $P \subset [a, b]$  al più numerabile tale che  $f$  è semicontinua inferiormente in ogni  $x \in [a, b] \setminus P$ .