

**ISTITUZIONI ANALISI E GEOMETRIA MOD. A, AA 14/15**  
**ESERCITAZIONE DEL 14/01/15**

- (1) Siano  $p, q \in (0, +\infty)$  due esponenti coniugati. Siano  $f \in L^p(\mathbb{R}^n), g \in L^q(\mathbb{R}^n)$  tali che esiste  $\delta > 0$  per cui

$$\int_{|x|>R} |f(x)|^p d\mu(x) \leq R^{-p\delta}, \int_{|x|>R} |g(x)|^q d\mu(x) \leq R^{-q\delta}, \forall R > 0.$$

Stabilire se

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f * g(x) = 0,$$

e se sí con che ordine di infinitesimo.

**Sol.:** Sia  $|x| = 2R$  allora

$$|f * g(x)| = \left| \int_{|y|<R} f(x-y)g(y)d\mu(y) + \int_{|y|>R} f(x-y)g(y)d\mu(y) \right|.$$

Ora, se  $|y| < R$  allora  $|x-y| > R$ , quindi

$$|f * g(x)| \leq \left| \int_{|z|>R} f(z)g(x-z)d\mu(z) \right| + \left| \int_{|y|>R} f(x-y)g(y)d\mu(y) \right|,$$

da cui con Hölder

$$|f * g(x)| \leq R^{-\delta} \|g\|_q + R^{-\delta} \|f\|_p,$$

quindi

$$|f * g(x)| = O(|x|^{-\delta}), \text{ per } x \rightarrow \infty.$$

- (2) Sia  $f \in L^1(\mathbb{R})$ . Calcolare, se esiste,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} \frac{f(x - \log n)}{\log(2 + |x|)} d\mu(x).$$

**Sol.:** Sostituendo  $y = x - \log n$  si ha

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{f(x - \log n)}{\log(2 + |x|)} d\mu(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{f(y)}{\log(2 + |y + \log n|)} d\mu(y).$$

Posto  $g_n(y) = \frac{f(y)}{\log(2 + |y + \log n|)}$  si ha

$$|g_n(y)| \leq \frac{|f(y)|}{\log(2)} \forall n, \forall y,$$

inoltre, per ogni  $y$  per cui  $f(y) \in \mathbb{R}$ ,

$$g_n(y) = \frac{f(y)}{\log(2 + |y + \log n|)} \rightarrow 0 \text{ per } n \rightarrow \infty.$$

Per il teorema di convergenza dominata

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} \frac{f(x - \log n)}{\log(2 + |x|)} d\mu(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} g_n(y) d\mu(y) = 0.$$

- (3) Sia  $f$  integrabile su  $\mathbb{R}^2$ . Posto  $g(u, v) = f(ue^v, u(e^v - e^{-v}))u$ , stabilire se  $g$  è integrabile su  $S = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 | u > 0\}$ .

**Sol.:** Sia  $\Phi(u, v) = (ue^v, u(e^v - e^{-v}))$ , questa è una applicazione differenziabile da  $S$  in  $\mathbb{R}^2$ . La sua immagine  $\Phi(S)$  è il settore

$$\Sigma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x > 0, x - y > 0\}$$

e  $\Phi : S \mapsto \Sigma$  è invertibile. Si ha

$$\det D\Phi(u, v) = 2u > 0$$

quindi  $\Phi : S \mapsto \Sigma$  è un diffeomorfismo. Pertanto  $g(u, v) = f \circ \Phi(u, v) \det D\Phi(u, v)$  è integrabile su  $S$  e vale

$$\int_{\Sigma} f(x, y) d\mu(x, y) = 2 \int_S g(u, v) d\mu(u, v) .$$