

**ISTITUZIONI DI ANALISI E GEOMETRIA MOD A**  
**PROVA SCRITTA DEL 11/06/13**

- (1) Sia  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  uno spazio con misura completo e  $\sigma$ -finito. Sia  $F \in C^1(\mathbb{R})$  tale  $F(0) = 0$ ,  $F'(t) > 0$  per  $t > 0$  e  $F'(t) < 0$  per  $t < 0$ . Provare che, per ogni  $f$  funzione integrabile su  $X$  si ha

$$\int_X F(f) d\mu = \int_0^{+\infty} \mu(\{x \in X | f(x) > t\}) F'(t) dt - \\ - \int_0^{+\infty} \mu(\{x \in X | f(x) < -t\}) F'(-t) dt .$$

- (2) Sia  $f$  integrabile secondo Lebesgue nel semipiano

$$\mathbb{R}_+^2 = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 | v > 0\}$$

e sia

$$\int_{\mathbb{R}_+^2} f = 1 .$$

Provare che la funzione  $f(x^2 - y^2, 2xy)(x^2 + y^2)$  é integrabile nel quadrante  $Q = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x, y > 0\}$  e calcolarne l'integrale.

- (3) Sia  $\varphi$  integrabile secondo Lebesgue su  $\mathbb{R}$ , calcolare, se esiste,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} \varphi(x - n) d\mu(x) .$$