

ISTITUZIONI ANALISI SUP. 1, AA 05/06
PROVA SCRITTA DEL 22/11/05

- (1) Sia $\{X, \mathcal{A}, \mu\}$ uno spazio con misura completo. Sia f una funzione nonnegativa su X . Sia E l'insieme

$$E = \{(x, t) \in X \times \mathbb{R} \mid 0 < t < f(x)\} .$$

Provare che se E è misurabile in $X \times \mathbb{R}$ allora f è misurabile su X .

- (2) Sia $\{X, \mathcal{A}, \mu\}$ uno spazio con misura completo e σ -finito. Sia f una funzione nonnegativa e misurabile su X . Provare che

$$\int_X \sinh(f(x)) d\mu(x) = \int_0^{+\infty} \cosh(t) \mu_f(t) dt$$

dove

$$\mu_f(t) = \mu\{f > t\} , \quad \forall t \geq 0 .$$

- (3) Sia $\{X, \mathcal{A}, \mu\}$ uno spazio con misura e siano f e $\{f_n\}$ una funzione e una successione di funzioni misurabili su X tali che

$$\int_X |f_n - f| d\mu \rightarrow 0 \text{ per } n \rightarrow \infty .$$

Provare che $f_n \rightarrow f$ in misura. Dare un esempio in cui $f_n \not\rightarrow f$ quasi ovunque.