

ISTITUZIONI DI ANALISI E GEOMETRIA
MOD A, AA 14/15
ESERCIZI DEL 23/10/14

- (1) Sia $E \subset \mathbb{R}^n$ un insieme di Lebesgue. Supposto che esista $c > 0$ tale che per ogni intervallo $I \subset \mathbb{R}^n$ si abbia

$$\mu(E \cap I) \geq c\mu(I)$$

provare che $\mu(\mathbb{C}E) = 0$.

- (2) Sia $\alpha > 0$ e si ponga per ogni $A \subset \mathbb{R}^n$

$$\mu_\alpha(A) = \inf \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda(I_k))^\alpha \mid \{I_k\} \text{ successione di intervalli t.c. } A \subset \cup_k I_k \right\}.$$

(a) Provare che μ_α è una misura esterna.

(b) Provare che, se $\alpha > 1$, allora $\mu_\alpha(A) = 0$ per ogni A .

- (3) Sia (X, \mathcal{A}, μ) uno spazio con misura. Sia $f : X \rightarrow [-\infty, +\infty]$ tale che $\{f > \alpha\} \in \mathcal{A}$ per ogni $\alpha \in \mathbb{R} \setminus F$, dove F è un insieme di Lebesgue di misura nulla. Provare che f è misurabile.
- (4) Sia data una funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Provare che se f è continua in ogni punto $x \in \mathbb{R} \setminus E$ dove E è un insieme di Lebesgue di misura nulla, allora f è misurabile, rispetto alla misura di Lebesgue.