

ISTITUZIONI ANALISI E GEOMETRIA MOD. A, AA 15/16
ESERCIZI DEL 19/11/15

- (1) Siano $f, g, f_k, k = 1, 2, \dots$ funzioni misurabili quasi ovunque finite su uno spazio con misura (X, \mathcal{A}, μ) . Si abbia che $f_k \rightarrow f$ in misura.
 - (a) Provare che, se $\mu\{g \neq 0\} < \infty$, allora $gf_k \rightarrow gf$ in misura.
 - (b) Dare un controesempio nel caso $\mu\{g \neq 0\} = \infty$.
- (2) Sia (X, \mathcal{A}, μ) uno spazio con misura. Sia $F = (f_1, \dots, f_n)$ una applicazione da X in \mathbb{R}^n . Provare che le funzioni f_1, \dots, f_n sono misurabili se e solo se per ogni aperto $A \subset \mathbb{R}^n$ l'insieme $F^{-1}(A)$ è misurabile.
- (3) Sia $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ tale che f è continua in x per quasi ogni punto $x \in [0, 1]$. Provare che f è misurabile.
- (4) Sia (X, \mathcal{A}, μ) uno spazio con misura e siano f e $\{f_n\}$ una funzione e una successione di funzioni misurabili su X tali che

$$\int_X |f_n - f| d\mu \rightarrow 0 \text{ per } n \rightarrow \infty.$$

Provare che $f_n \rightarrow f$ in misura. Dare un esempio in cui $f_n \not\rightarrow f$ quasi ovunque.