

ISTITUZIONI DI ANALISI E GEOMETRIA MOD A
PROVA SCRITTA DEL 11/06/12

- (1) Sia (X, \mathcal{A}, μ) uno spazio con misura. Siano $f, g, f_n, n = 1, 2, \dots$ funzioni misurabili tali che g è integrabile e

$$f_n \rightarrow f \text{ in misura.}$$

Provare che

$$gf_n \rightarrow gf \text{ in misura.}$$

- (2) Sia (X, \mathcal{A}, μ) uno spazio con misura. Sia f misurabile su x tale che per ogni $E \in \mathcal{A}$ esiste $p \geq 0$ tale che

$$\int_E |f|^p d\mu = 0 .$$

Provare che $f = 0$ q.o. .

- (3) Siano $r, p, q \geq 1$ tali che

$$1 + \frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} .$$

Siano $f \in L^p(\mathbb{R}^n), g \in L^q(\mathbb{R}^n)$ e sia $h = f * g$. Si ponga ω_p^f il modulo di continuità in L^p di f , e si definiscano analogamente ω_q^g, ω_r^h . Si dimostri che

$$\omega_r^h \leq \omega_p^f \|g\|_q ,$$

e anche che

$$\omega_r^h \leq \omega_q^g \|f\|_p .$$