

**ISTITUZIONI DI ANALISI E GEOMETRIA MOD A**  
**PROVA SCRITTA DEL 09/09/13**

- (1) Sia  $f \in L^1(\mathbb{R})$ , calcolare, se esiste:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} e^{-(1+|x|)^k} f(x) d\mu(x) .$$

- (2) Sia  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  uno spazio con misura e siano  $f, g$  due funzioni misurabili su  $X$  a valori reali. Sia  $F : X \rightarrow \mathbb{R}^2$  l'applicazione data da  $F(x) = (f(x), g(x))$  per ogni  $x \in X$ . Provare che per ogni aperto  $A \subset \mathbb{R}^2$  si ha che  $F^{-1}(A)$  è misurabile.
- (3) Sia  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  uno spazio con misura. Sia  $\{f_n\}$  una successione di funzioni misurabili su  $X$ , tale che  $f_n \rightarrow 0$  in misura. Sia  $g$  una funzione misurabile su  $X$  tale che esiste  $\varepsilon > 0$  per cui  $|g|^\varepsilon$  è integrabile. Provare che

$$gf_n \rightarrow 0$$

in misura.