

ISTITUZIONI DI ANALISI E GEOMETRIA MOD A
PROVA SCRITTA DEL 12 APRILE 2012

- (1) Fissato $a > 0$, sia

$$\varphi(x) = \frac{1}{x^2 + a^2}, x \in \mathbb{R}.$$

Sia $\{f_n\}$ la successione di funzioni definita per ricorrenza

$$f_0 = \varphi, f_{n+1} = \varphi * f_n.$$

Calcolare, al variare di a ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} f_n.$$

- (2) Sia $\{f_n\}$ una successione di funzioni in $L^2([0, 1])$ tali che $\|f_n\|_2 \leq 1$ per ogni n e $f_n \rightarrow 0$ q.o..

Dire, spiegandolo, se le seguenti affermazioni sono vere:

- (i) $f_n \rightarrow 0$ quasi uniformemente,
- (ii) $f_n \rightarrow 0$ in misura,
- (iii) $f_n \rightarrow 0$ in $L^1([0, 1])$.

Dare un esempio per cui $f_n \not\rightarrow 0$ in $L^2([0, 1])$.

- (3) Sia f misurabile nonnegativa su uno spazio con misura (x, \mathcal{A}, μ) . Posto $\nu(E) = \int_E f d\mu$, per ogni $E \in \mathcal{A}$, provare che $\nu(E) \leq K\mu(E)$ per ogni $E \in \mathcal{A}$ se e solo se $\|f\|_\infty \leq K$.