

**ISTITUZIONI DI ANALISI SUPERIORE 1, AA 08/09**  
**TEST N. 2 DEL 10/11/08**

- (1) Sia  $\mathcal{A}$  una  $\sigma$ -algebra su uno spazio  $X$  e siano  $\mu$  e  $\nu$  due misure su  $\mathcal{A}$ . Si ponga  $\lambda(E) = \mu(E) + \nu(E)$  per ogni  $E \in \mathcal{A}$ .

(a) Provare che  $\lambda$  è una misura su  $\mathcal{A}$ .

(b) Provare che una funzione  $f$  è integrabile su  $(X, \mathcal{A}, \lambda)$  se e solo se è integrabile su  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  e su  $(X, \mathcal{A}, \nu)$ . Provare poi che vale

$$\int_X f d\lambda = \int_X f d\mu + \int_X f d\nu .$$

- (2) Siano  $\{f_n\}$  e  $\{g_n\}$  due successioni di funzioni misurabili su  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  tali che  $f_n \rightarrow 0$  e  $g_n \rightarrow 0$  in misura. Provare che  $f_n g_n \rightarrow 0$  in misura.

- (3) Sia  $g : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$  una funzione strettamente crescente e tale che

$$\lim_{t \rightarrow 0+} g(t) = 0 .$$

Sia  $\{f_n\}$  una successione di funzioni misurabili su  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  tale che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X g(|f_n|) d\mu = 0 .$$

Provare che  $f_n \rightarrow 0$  in misura.