

**ISTITUZIONI DI ANALISI E GEOMETRIA MOD A**  
**PROVA SCRITTA DEL 27 FEBBRAIO 2012**

- (1) Siano  $f, f_k, k = 1, 2, \dots$  funzioni misurabili quasi ovunque finite su uno spazio con misura  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  tali che  $f_k \rightarrow f$  in misura. Provare che

$$\sin^3(f_k) \rightarrow \sin^3(f) \text{ in misura .}$$

**Soluzione:** La derivata di  $\sin^3(t)$  è limitata:  $|\frac{d}{dt} \sin^3(t)| \leq 3$ . Quindi per ogni  $\varepsilon > 0$  si ha

$$\{|\sin^3(f_k) - \sin^3(f)| > \varepsilon\} \subset \{|f_k - f| > \frac{\varepsilon}{3}\}$$

e la tesi segue subito.

- (2) Sia  $\{f_k\}$  una successione di funzioni misurabili su uno spazio con misura  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  tali che

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_X (\cosh(f_k) - 1) d\mu = 0 .$$

Provare che

$$f_k \rightarrow 0 \text{ in } L^p \text{ per ogni } 2 \leq p < \infty .$$

**(N.B.: nel testo mancava questa precisazione!)**

**Soluzione:**  $\cosh(t) - 1 = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{t^{2m}}{(2m)!} \geq \frac{t^{2m}}{(2m)!}$  per ogni  $m = 1, 2, \dots$ . Da cui

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_X |f_k|^{2m} d\mu = 0 .$$

Preso  $p$  arbitrario  $\geq 2$  la tesi segue dalla disuguaglianza interpolatoria, dato che esisterà  $m$  t.c.  $2m \leq p < 2m + 2$ .

- (3) Sia  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  uno spazio con misura  $\sigma$ -finito e completo. Sia  $\lambda$  la misura di Lebesgue su  $\mathbb{R}$ . Siano  $f, g$  due funzioni integrabili su  $X$ , calcolare, se definita, la misura  $\mu \times \lambda$  dell'insieme

$$E = \{(x, t) \in X \times \mathbb{R} | f(x) < t < g(x)\} .$$

**Soluzione:** Il punto cruciale sta nel verificare che  $E$  è misurabile. A questo scopo è sufficiente considerare separatamente l'insieme

$$F = \{(x, t) \in X \times \mathbb{R} | f(x) < t\}$$

e l'insieme

$$G = \{(x, t) \in X \times \mathbb{R} | t < g(x)\} \ .$$

Si procede trattando prima il caso di  $f, g$  nonnegative e approssimando con funzioni semplici. Una volta stabilito che  $E$  è misurabile, si calcola  $\lambda(E_x) = [g(x) - f(x)]^+$  e si ottiene

$$\mu \times \lambda E = \int_X [g(x) - f(x)]^+ d\mu(x) \ .$$