

ISTITUZIONI DI ANALISI SUPERIORE 1, AA 04/05
TEST N. 1 DEL 09/11/04

- (1) Provare che la famiglia \mathcal{F} di sottoinsiemi di \mathbb{R}^n data da
 $\mathcal{F} = \{U \subset \mathbb{R}^n \mid \text{esiste } K = 1, 2, \dots \text{ ed esistono intervalli } I_1, \dots, I_K \text{ tali che } U = \cup_{k=1}^K I_k\}$
 costituisce un'algebra.
- (2) Sia \mathcal{F} come sopra, sia $U \in \mathcal{F}$, provare che esiste una famiglia finita $\{J_l\}_{l=1}^L$ di intervalli a due a due disgiunti tali che $U = \cup_{l=1}^L J_l$.
- (3) Provare che se gli intervalli I_k , J_l sono tali che $\cup_{l=1}^L J_l = \cup_{k=1}^K I_k$ e gli intervalli J_l sono a due a due disgiunti, allora vale

$$\sum_{l=1}^L \lambda(J_l) \leq \sum_{k=1}^K \lambda(I_k),$$

dove con $\lambda(\cdot)$ si indica la lunghezza degli intervalli.

- (4) Sia \mathcal{F} come sopra, sia $U \in \mathcal{F}$, e sia $\{J_l\}_{l=1}^L$ una famiglia finita di intervalli a due a due disgiunti tali che $U = \cup_{l=1}^L J_l$. Provare che

$$\nu(U) = \sum_{l=1}^L \lambda(J_l)$$

è una funzione d'insieme ben definita su \mathcal{F} e che verifica gli assiomi di misura su un'algebra.