

**ISTITUZIONI ANALISI SUP. 1, AA 05/06**  
**PROVA SCRITTA DEL 22/11/05**

- (1) Sia  $\{X, \mathcal{A}, \mu\}$  uno spazio con misura completo. Sia  $f$  una funzione nonnegativa su  $X$ . Sia  $E$  l'insieme

$$E = \{(x, t) \in X \times \mathbb{R} \mid 0 < t < f(x)\} .$$

Provare che se  $E$  è misurabile in  $X \times \mathbb{R}$  allora  $f$  è misurabile su  $X$ .

- (2) Sia  $\{X, \mathcal{A}, \mu\}$  uno spazio con misura completo e  $\sigma$ -finito. Sia  $f$  una funzione nonnegativa e misurabile su  $X$ . Provare che

$$\int_X \sinh(f(x)) d\mu(x) = \int_0^{+\infty} \cosh(t) \mu_f(t) dt$$

dove

$$\mu_f(t) = \mu\{f > t\} , \quad \forall t \geq 0 .$$

- (3) Sia  $\{X, \mathcal{A}, \mu\}$  uno spazio con misura e siano  $f$  e  $\{f_n\}$  una funzione e una successione di funzioni misurabili su  $X$  tali che

$$\int_X |f_n - f| d\mu \rightarrow 0 \text{ per } n \rightarrow \infty .$$

Provare che  $f_n \rightarrow f$  in misura. Dare un esempio in cui  $f_n \not\rightarrow f$  quasi ovunque.