

ISTITUZIONI DI ANALISI E GEOMETRIA MOD A
PROVA SCRITTA DEL 08/06/15

(1) Sia $f \in L^1(\mathbb{R}^3)$, tale che $\int_{\mathbb{R}^3} f(x) d\mu(x) = 1$. Posto

$$g(x) = f(x_1 - x_2^2, x_2 - x_3^3, x_3) , \quad x = (x_1, x_2, x_3) ,$$

stabilire se g è integrabile su \mathbb{R}^3 e, se sì, calcolarne l'integrale.

(2) Presa $f \in L^1(\mathbb{R})$, calcolare, se esiste, il seguente limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} \frac{f(x - e^n)}{1 + x^2} d\mu(x) .$$

(3) Sia φ una funzione misurabile su \mathbb{R} tale che $|\varphi(x)| \leq e^{-|x|}$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ e si ponga

$$\varphi_n(x) = n\varphi(nx) , \quad \forall x \in \mathbb{R} , n = 1, 2, \dots .$$

Provare che, preso p , $1 \leq p < \infty$, per ogni $f \in L^p(\mathbb{R})$ vale

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n * f = \left(\int_{\mathbb{R}} \varphi(x) d\mu(x) \right) f, \quad \text{in } L^p(\mathbb{R}) .$$