

**ISTITUZIONI DI ANALISI E GEOMETRIA MOD A**  
**PROVA SCRITTA DEL 08/06/15**

(1) Sia  $f \in L^1(\mathbb{R}^3)$ , tale che  $\int_{\mathbb{R}^3} f(x) d\mu(x) = 1$ . Posto

$$g(x) = f(x_1 - x_2^2, x_2 - x_3^3, x_3) , \quad x = (x_1, x_2, x_3) ,$$

stabilire se  $g$  è integrabile su  $\mathbb{R}^3$  e, se sì, calcolarne l'integrale.

**Soluzione.** Si ponga  $y(x) = (x_1 - x_2^2, x_2 - x_3^3, x_3)$ , si ha che questo è un diffeomorfismo di  $\mathbb{R}^3$  in sé, infatti l'inverso  $x = x(y)$  è dato da

$$x(y) = (y_1 + (y_2 + y_3^3)^2, y_2 + y_3^3, y_3)$$

e il determinante jacobiano della trasformazione è identicamente

1. Quindi  $g$  è integrabile su  $\mathbb{R}^3$  e vale

$$\int_{\mathbb{R}^3} g(x) d\mu(x) = \int_{\mathbb{R}^3} f(y) d\mu(y) = 1 .$$

(2) Presa  $f \in L^1(\mathbb{R})$ , calcolare, se esiste, il seguente limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} \frac{f(x - e^n)}{1 + x^2} d\mu(x) .$$

**Soluzione.** Si opera il cambio di variabile  $y = x - e^n$  (una traslazione) e si ottiene

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{f(x - e^n)}{1 + x^2} d\mu(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{f(y)}{1 + (y + e^n)^2} d\mu(y)$$

ora la funzione integranda si maggiora

$$\left| \frac{f(y)}{1 + (y + e^n)^2} \right| \leq |f(y)|$$

e vale

$$\frac{f(y)}{1 + (y + e^n)^2} \rightarrow 0 \text{ per quasi ogni } y .$$

Quindi per il teorema della convergenza dominata segue

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} \frac{f(x - e^n)}{1 + x^2} d\mu(x) = 0 .$$

- (3) Sia  $\varphi$  una funzione misurabile su  $\mathbb{R}$  tale che  $|\varphi(x)| \leq e^{-|x|}$  per ogni  $x \in \mathbb{R}$  e si ponga

$$\varphi_n(x) = n\varphi(nx) , \quad \forall x \in \mathbb{R} , n = 1, 2, \dots .$$

Provare che, preso  $p$ ,  $1 \leq p < \infty$ , per ogni  $f \in L^p(\mathbb{R})$  vale

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n * f = \left( \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) d\mu(x) \right) f, \text{ in } L^p(\mathbb{R}) .$$

**Soluzione.** Si nota intanto che  $\varphi$  è integrabile e che vale

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi_n(x) d\mu(x) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) d\mu(x)$$

per ogni  $n$ , quindi

$$\varphi_n * f(y) - \left( \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) d\mu(x) \right) f(y) = \int_{\mathbb{R}} \varphi_n(x) (f(y-x) - f(y)) d\mu(x) .$$

Per la disuguaglianza di Minkowski integrale

$$\begin{aligned} \|\varphi_n * f - \left( \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) d\mu(x) \right) f\|_p &\leq \int_{\mathbb{R}} |\varphi_n(x)| \|f(\cdot - x) - f(\cdot)\|_p d\mu(x) = \\ &= \int_{\mathbb{R}} |n\varphi(nx)| \|f(\cdot - x) - f(\cdot)\|_p d\mu(x) = \end{aligned}$$

e, per ogni  $\delta > 0$ ,

$$\begin{aligned} &= \int_{|x| < \delta} n|\varphi(nx)| \|f(\cdot - x) - f(\cdot)\|_p d\mu(x) + \int_{|x| > \delta} n|\varphi(nx)| \|f(\cdot - x) - f(\cdot)\|_p d\mu(x) \leq \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} |\varphi(x)| d\mu(x) \sup_{|x| < \delta} \|f(\cdot - x) - f(\cdot)\|_p + \int_{|x| > \delta} n|\varphi(nx)| \|f(\cdot - x) - f(\cdot)\|_p d\mu(x) . \end{aligned}$$

Per la continuità in  $L^p$  di  $f$ , per ogni  $\varepsilon > 0$  si trova  $\delta > 0$  tale che  $\sup_{|x| < \delta} \|f(\cdot - x) - f(\cdot)\|_p \leq \varepsilon$ , quindi

$$\int_{\mathbb{R}} |\varphi(x)| d\mu(x) \sup_{|x| < \delta} \|f(\cdot - x) - f(\cdot)\|_p \leq \int_{\mathbb{R}} |\varphi(x)| d\mu(x) \varepsilon = \text{cost. } \varepsilon .$$

L'integrale restante si maggiora così

$$\begin{aligned} \int_{|x| > \delta} n|\varphi(nx)| \|f(\cdot - x) - f(\cdot)\|_p d\mu(x) &\leq \int_{|x| > \delta} n e^{-|nx|} \|f(\cdot - x) - f(\cdot)\|_p d\mu(x) \leq \\ &\leq 2\|f\|_p \int_{|x| > \delta} n e^{-|nx|} d\mu(x) = 4\|f\|_p \int_{n\delta}^{\infty} e^{-t} dt \rightarrow 0 \\ &\text{per } n \rightarrow \infty . \end{aligned}$$