

**ISTITUZIONI DI ANALISI E GEOMETRIA MOD A**  
**PROVA SCRITTA DEL 16/2/15**

- (1) Sia  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  uno spazio con misura. Sia  $p$  tale che  $2 \leq p < \infty$ . Siano  $f, g \in L^p(X)$  due elementi distinti tali che  $\|f\|_p = \|g\|_p = 1$ . Si ponga

$$\Phi(t) = \int_X |tf + (1-t)g|^p d\mu, \quad t \in [0, 1] .$$

Studiare la funzione  $\Phi$  e dimostrare che

$$\Phi(t) < 1, \quad \forall t \in (0, 1) .$$

- (2) Siano  $p, q \geq 1$  tali che  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \leq 1$ , siano  $f \in L^p(\mathbb{R}), g \in L^q(\mathbb{R})$ , determinare, se esiste, un esponente  $r \geq 1$  tale che  $fg \in L^r(\mathbb{R})$ .  
(3) Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{[0,1]} \frac{x^n + 1}{x^n + 2} d\mu(x) .$$