

**ISTITUZIONI ANALISI SUP. 1, AA 05/06**  
**PROVA SCRITTA DEL 8/11/05**

- (1) Siano  $\{f_k\}$ ,  $\{g_k\}$  due successioni di funzioni misurabili quasi ovunque finite tali che

$$f_k \rightarrow f$$

$$g_k \rightarrow g$$

in misura, dove  $f$ ,  $g$  sono funzioni misurabili quasi ovunque finite. Provare che

$$f_k + g_k \rightarrow f + g$$

in misura.

- (2) Sia  $E \subset \mathbb{R}^n$  misurabile di misura finita. Sia  $\{f_k\}$  una successione di funzioni misurabili su  $E$  e supponiamo che esista  $g : E \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione tale che

$$|f_k(x)| \leq g(x) \quad \forall x \in E, \forall k.$$

- (a) Provare che per ogni  $\epsilon > 0$  esiste un chiuso  $F \subset E$ , ed esiste  $M > 0$  tali che  $\mu(E \setminus F) \leq \epsilon$  e

$$|f_k(x)| \leq M, \quad \forall x \in F, \forall k.$$

- (b) Provare con un esempio che l'ipotesi  $\mu(E) < \infty$  è necessaria.

- (3) Sia  $\{f_k\}$  una successione di funzioni misurabili quasi ovunque finite. Provare che le seguenti affermazioni sono equivalenti:

$$(i) \quad \forall \epsilon > 0 \exists N > 0 \text{ tale che } \mu\{|f_n - f_m| > \epsilon\} < \epsilon \quad \forall n, m \geq N.$$

$$(ii) \quad \forall \eta, \delta > 0 \exists M > 0 \text{ tale che } \mu\{|f_n - f_m| > \eta\} < \delta \quad \forall n, m \geq M.$$