

ISTITUZIONI ANALISI E GEOMETRIA MOD. A, AA 14/15
ESERCIZI DEL 20/12/14

- (1) Sia $f \geq 0$ una funzione misurabile su uno spazio con misura $\{X, \mathcal{A}, \mu\}$. Si ponga

$$\nu(E) = \int_E f d\mu, \forall E \in \mathcal{A}.$$

Dato $K \geq 0$, provare che

$$\nu(E) \leq K\mu(E), \forall E \in \mathcal{A}$$

se e solo se $\|f\|_\infty \leq K$.

- (2) Sia $\{X, \mathcal{A}, \mu\}$ uno spazio con misura finito. Sia $\{f_n\}$ una successione di funzioni misurabili q.o. finite tale che $f_n \rightarrow 0$ in misura. Calcolare

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X \arctan |f_n| d\mu.$$

- (3) Sia $\{X, \mathcal{A}, \mu\}$ uno spazio con misura e sia $\{f_n\}$ una successione di funzioni misurabili su X tale che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X (\cosh(\sqrt{|f_n|}) - 1) d\mu = 0.$$

Provare che $\|f_n\|_p \rightarrow 0$ per ogni $p \geq 1$.

- (4) Sia f integrabile su \mathbb{R}^2 tale che $f(x, y) = f(-x, y) = f(x, -y)$ per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, e sia $\int_{\mathbb{R}^2} f = 1$. Posto $g(u, v) = f(e^{u-v}, e^{u+2v})e^{2u+v}$, stabilire se g è integrabile su \mathbb{R}^2 e se sì calcolarne l'integrale $\int_{\mathbb{R}^2} g$.