

ISTITUZIONI DI ANALISI E GEOMETRIA MOD A
PROVA SCRITTA DEL 20/01/14

- (1) Sia $f \in L^1(\mathbb{R})$, tale che $f(x) = 0$ per ogni x tale che $|x| \geq 1$. Posto $f_n(x) = 2^n f(2^n x)$ per ogni $n = 0, 1, 2, \dots$, si definisca per induzione:

$$\begin{cases} g_0 = f_0 , \\ g_{n+1} = f_{n+1} * g_n , \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{cases}$$

Si calcoli, se esiste:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g_n(3) .$$

Soluzione. f_n ha supporto nell'intervallo $[-2^{-n}, 2^{-n}]$. Per induzione si verifica che g_n ha supporto in $[-r_n, r_n]$ dove $r_n = 1 + \dots + 2^{-n} < 2$ per ogni n . Quindi $g_n(3) = 0$ per ogni n .

- (2) Sia $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x > |y|\}$. Sia f integrabile su S . Stabilire se

$$g(x, y) = 4(x^2 - y^2)f(x^2 + y^2, 2xy)$$

è integrabile su S .

Soluzione. Si verifica che il cambio di variabili $u = x^2 + y^2, v = 2xy$ costituisce un diffeomorfismo di S in sé ed ha determinante Jacobiano $4(x^2 - y^2)$. Quindi

$$\int_S f(u, v) d\mu(u, v) = \int_S f(x^2 + y^2, 2xy) 4(x^2 - y^2) d\mu(x, y) .$$

- (3) Sia (X, \mathcal{A}, μ) uno spazio con misura finito e $\{f_n\}$ una successione di funzioni misurabili q.o. finite tale che $f_n \rightarrow 0$ in misura.

(a) Provare che per ogni $\alpha \in (0, 2]$ vale

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X \frac{|f_n|^\alpha}{1 + f_n^2} d\mu = 0 .$$

(b) Calcolare

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X \frac{1}{1 + f_n^2} d\mu .$$

(c) Preso $\alpha > 2$, dare un esempio (di uno spazio (X, \mathcal{A}, μ) e di una successione $\{f_n\}$ soddisfacenti le ipotesi) per cui

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X \frac{|f_n|^\alpha}{1 + f_n^2} d\mu \neq 0 .$$

Soluzione.(a) Se $\alpha \in (0, 2]$ esiste $C_\alpha > 0$ tale che

$$\frac{|t|^\alpha}{1+t^2} \leq C_\alpha, \forall t \in \mathbb{R}.$$

Per ogni $\varepsilon > 0$ si maggiore

$$\int_X \frac{|f_n|^\alpha}{1+f_n^2} d\mu \leq \int_{\{|f_n|>\varepsilon\}} C_\alpha d\mu + \int_{\{|f_n|\leq\varepsilon\}} \varepsilon^\alpha d\mu$$

e quindi

$$\int_X \frac{|f_n|^\alpha}{1+f_n^2} d\mu \leq \mu(\{|f_n| > \varepsilon\})C_\alpha + \mu(X)\varepsilon^\alpha$$

da cui la tesi.

(b)

$$\int_X \frac{1}{1+f_n^2} d\mu = \int_X \left(1 - \frac{f_n^2}{1+f_n^2}\right) d\mu \rightarrow \mu(X).$$

(c) Sia $X = [0, 1]$ con la misura di Lebesgue. Si ponga $f_n = 2^n \chi_{[0, 1/n]}$. Ora f_n tende a zero in misura e, se $\alpha > 2$, si ha

$$\int_X \frac{|f_n|^\alpha}{1+f_n^2} d\mu = \frac{1}{n} \frac{2^{n\alpha}}{1+2^{2n}} \rightarrow \infty.$$