

**ISTITUZIONI DI ANALISI E GEOMETRIA MOD A**  
**PROVA SCRITTA DEL 19/02/13**

- (1) Fissato  $a > 0$ , si definisce per ricorrenza la successione di funzioni  $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ponendo:

$$f_1(x) = \exp\left(-\frac{x^2}{a^2}\right), f_{n+1}(x) = f_1 * f_n(x) \quad \forall n = 1, 2, \dots$$

Stabilire per quali valori di  $a$  risulta

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} f_n = 0.$$

(Ricordare che  $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$ .)

- (2) Sia  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  uno spazio con misura, siano  $p, q \geq 1$  due esponenti coniugati. Siano  $f \in L^p(X)$ ,  $G \in L^q(X)$  e siano  $g, g_n, n = 1, 2, \dots$  funzioni misurabili tali che  $g_n \rightarrow g$  q.o. su  $X$  e per ogni  $n$  valga  $|g_n| \leq G$ , sempre q.o. su  $X$ . Provare che

$$f g_n \rightarrow f g \text{ in } L^1(X).$$

- (3) Sia  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  uno spazio con misura completo e  $\sigma$ -finito. Sia  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione non-negativa. Posto

$$E = \{(x, t) \in X \times \mathbb{R} \mid 0 < t < f(x)\}$$

provare che se  $E$  è misurabile nello spazio prodotto  $X \times \mathbb{R}$  allora  $f$  è misurabile.