

ISTITUZIONI DI ANALISI SUPERIORE 1, AA 05/06
TEST N. 2 DEL 10/11/06

- (1) Sia (X, \mathcal{A}, μ) uno spazio con misura. Sia $F = \{a \in \mathbb{R} \mid \exists n \in \mathbb{N} \text{ t.c. } 10^n a \in \mathbb{Z}\}$. Sia $f : X \rightarrow [-\infty, +\infty]$ tale che $\{f > a\} \in \mathcal{A}$, $\forall a \in F$. Provare che f è misurabile.
- (2) Sia (X, \mathcal{A}, μ) uno spazio con misura finito. Siano f e $\{f_n\}$ una funzione e una successione di funzioni, tutte misurabili e quasi ovunque finite. Provare che le seguenti condizioni sono equivalenti.
- (i) $f_n \rightarrow f$ in misura.
 - (ii) Per ogni sottosuccessione $\{f_{n_k}\}$ di $\{f_n\}$ esiste una sotto-sottosuccessione $\{f_{n_{k_j}}\}$ che converge q.o. a f .
- (3) Sia (X, \mathcal{A}, μ) uno spazio con misura. Sia $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ suriettiva. Sia $\mathcal{D} = \{D \subset \mathbb{R} \mid f^{-1}(D) \in \mathcal{A}\}$.
- (a) Provare che \mathcal{D} è una σ -algebra.
 - (b) Provare che se f è misurabile allora, $\forall B \in \mathcal{B}$ boreliano su \mathbb{R} si ha che $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$.