

ISTITUZIONI DI ANALISI SUPERIORE 1, AA 04/05
TEST DI RECUPERO DEL 09/12/04

- (1) Provare che lo spazio con misura di Lebesgue $(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}^n, \mu)$ è regolare, cioè, $\forall E \subset \mathbb{R}^n$ si ha

$$\mu^*(E) = \inf \left\{ \sum \mu(E_i) \mid \{E_i\} \subset \mathcal{L}^n, E \subset \cup E_i \right\} ,$$

dove μ^* indica la misura esterna di Lebesgue.

- (2) Dimostrare la seguente variante al Teorema di Convergenza Dominata.

Sia $\{g_n\}$ una successione di funzioni nonnegative integrabili tali che $g_n \rightarrow g$ q.o. ove g è una funzione integrabile. Sia poi, $\{f_n\}$ una successione di funzioni misurabili tali che $f_n \rightarrow f$ q.o. ove f è una funzione misurabile e $|f_n| \leq g_n$, $\forall n$. Provare che, se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int g_n = \int g ,$$

allora

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n = \int f .$$

- (3) Sia fissato uno spazio con misura (X, \mathcal{A}, μ) sia f una funzione su X e sia E un sottoinsieme denso di \mathbb{R} tale che l'insieme $\{f > t\}$ è misurabile per ogni $t \in E$. Provare che f è misurabile.
- (4) Sia (X, \mathcal{A}, μ) uno spazio con misura completo, e sia $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione nonnegativa tale che l'insieme

$$E = \{(x, t) \in X \times \mathbb{R} \mid 0 < t < f(x)\}$$

è misurabile di misura finita in $X \times \mathbb{R}$. Provare che la funzione f è misurabile.