

ISTITUZIONI DI ANALISI E GEOMETRIA MOD A
PROVA SCRITTA DEL 25/09/13

(1) Calcolare (se esiste)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-(x-e^n)^4}}{\log(2+|x|)} d\mu(x) .$$

Sol.: Si fa il cambio di variabile $y = x - e^n$ e si ottiene

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-(x-e^n)^4}}{\log(2+|x|)} d\mu(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-(y)^4}}{\log(2+|y+e^n|)} d\mu(y) .$$

Posto

$$f_n(y) = \frac{e^{-(y)^4}}{\log(2+|y+e^n|)}$$

si ha $0 < f_n(y) \leq e^{-(y)^4}$ che è integrabile, e dato che $\log(2+|y+e^n|) \rightarrow \infty$ per ogni y , vale $f_n(y) \rightarrow 0$ ovunque. Per il teorema della convergenza dominata

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-(x-e^n)^4}}{\log(2+|x|)} d\mu(x) = 0 .$$

(2) Sia (X, \mathcal{A}, μ) uno spazio con misura finito. Sia $\{f_n\}$ una successione di funzioni misurabili tale che $f_n \rightarrow 0$ in misura. Calcolare (se esiste)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X (1 - e^{-|f_n|}) d\mu .$$

Sol.: Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste N tale che

$$\mu(\{|f_n| > \varepsilon\}) < \varepsilon, \forall n \geq N .$$

Scomponiamo

$$\int_X (1 - e^{-|f_n|}) d\mu = \int_{\{|f_n| > \varepsilon\}} (1 - e^{-|f_n|}) d\mu + \int_{\{|f_n| \leq \varepsilon\}} (1 - e^{-|f_n|}) d\mu$$

ora, sfruttando il fatto che, per $t > 0$, la funzione $1 - e^{-t}$ è crescente, è limitata da 1 e vale $1 - e^{-t} \leq t$ si ricava

$$\int_X (1 - e^{-|f_n|}) d\mu \leq \varepsilon + \mu(X) (1 - e^{-\varepsilon}) \leq (1 + \mu(X))\varepsilon$$

da cui

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X (1 - e^{-|f_n|}) d\mu = 0 .$$

- (3) Sia $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $f \geq 0$. Sia $\{t_k\}$ una successione crescente di numeri positivi tale che $\lim_{k \rightarrow \infty} t_k = t < \infty$. Determinare

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mu \{f > t_k\} .$$

Sol.: Sia $E_k = \{f > t_k\}$, la successione di insiemi misurabili E_k è decrescente e per Chebishev $\mu(E_1) < \infty$. Quindi

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mu \{f > t_k\} = \mu(\cap_k E_k) .$$

Ora si verifica che $\cap_k E_k = \{f \geq t\}$. Dunque

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mu \{f > t_k\} = \mu(\{f \geq t\}) .$$