

**ISTITUZIONI DI ANALISI E GEOMETRIA MOD A**  
**PROVA SCRITTA DEL 22/09/14**

- (1) Siano  $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ , tali che  $\int_{\mathbb{R}} f = \int_{\mathbb{R}} g = 1$ . Posto

$$F(x, y) = f(x - 2y)g(x + 3y)$$

stabilire se  $F$  è integrabile su  $\mathbb{R}^2$ , e se sì, calcolarne l'integrale.

**Sol.:** Si ponga  $G(u, v) = f(u)g(v)$ , si verifica che  $G$  è misurabile su  $\mathbb{R}^2$ , applicando Tonelli a  $|G|$  segue che  $G$  è integrabile e vale

$$\int_{\mathbb{R}^2} G(u, v) d\mu(u, v) = 1 .$$

Si consideri il cambiamento di variabili lineare invertibile  $u = x - 2y, v = x + 3y$ , si ricava

$$1 = \int_{\mathbb{R}^2} G(u, v) d\mu(u, v) = \int_{\mathbb{R}^2} G(x - 2y, x + 3y) 5 d\mu(x, y) .$$

Ora risulta  $F(x, y) = G(x - 2y, x + 3y)$ , e quindi  $F$  è integrabile e vale

$$\int_{\mathbb{R}^2} F(x, y) d\mu(x, y) = 1/5 .$$

- (2) Sia  $\mu^*$  la misura esterna di Lebesgue su  $\mathbb{R}^n$ . Provare che per ogni  $E \subset \mathbb{R}^n$  vale

$$\mu^*(E) = \inf \{ \mu^*(A) | A \text{ aperto}, A \supset E \} .$$

Provare inoltre che  $E$  è misurabile se e solo se

$$\inf \{ \mu^*(A \setminus E) | A \text{ aperto}, A \supset E \} = 0 .$$

**Sol.:** Si ponga

$$\alpha = \inf \{ \mu^*(A) | A \text{ aperto}, A \supset E \} ,$$

$$\beta = \inf \{ \mu^*(A \setminus E) | A \text{ aperto}, A \supset E \} .$$

Per la monotonia della misura esterna vale  $\mu^*(E) \leq \alpha$ . Sappiamo poi che per ogni insieme  $E \subset \mathbb{R}^n$  e per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste un aperto  $A \supset E$  tale che

$$\mu^*(A) \leq \mu^*(E) + \varepsilon$$

quindi, per ogni  $\varepsilon > 0$ ,

$$\mu^*(E) \leq \alpha \leq \mu^*(E) + \varepsilon$$

cioè  $\alpha = \mu^*(E)$ . Osserviamo che ovviamente  $\beta \geq 0$ . Ricordiamo anche che  $E$  è misurabile se e solo se, per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste un aperto  $A \supset E$  tale che

$$\mu^*(A \setminus E) \leq \varepsilon$$

ovvero  $E$  è misurabile se e solo se, per ogni  $\varepsilon > 0$ ,

$$0 \leq \beta \leq \varepsilon$$

cioè  $\beta = 0$ .

- (3) Sia  $\{f_n\}$  una successione di funzioni misurabili q.o. finite su uno spazio con misura  $(X, \mathcal{A}, \mu)$ , tale che  $f_n \rightarrow f$  in misura, con  $f$  misurabile q.o. finita. Sia  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione tale che  $|F(t) - F(s)| \leq \sqrt{|t - s|}$  per ogni  $t, s \in \mathbb{R}$ . Stabilire se

$$F(f_n) \rightarrow F(f) \text{ in misura } .$$

**Sol.:** Fissato  $\varepsilon > 0$  sia  $x$  tale che  $|F(f_n(x)) - F(f(x))| > \varepsilon$ . Allora  $\sqrt{|f_n(x) - f(x)|} > \varepsilon$ . In altri termini

$$\{|F(f_n) - F(f)| > \varepsilon\} \subset \{|f_n - f| > \varepsilon^2\}$$

quindi, per ogni  $\varepsilon > 0$ ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(\{|F(f_n) - F(f)| > \varepsilon\}) = 0 .$$