

ISTITUZIONI DI ANALISI E GEOMETRIA MOD A
PROVA SCRITTA DEL 20/01/14

- (1) Sia $f \in L^1(\mathbb{R})$, tale che $f(x) = 0$ per ogni x tale che $|x| \geq 1$. Posto $f_n(x) = 2^n f(2^n x)$ per ogni $n = 0, 1, 2, \dots$, si definisca per induzione:

$$\begin{cases} g_0 = f_0 , \\ g_{n+1} = f_{n+1} * g_n , \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{cases}$$

Si calcoli, se esiste:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g_n(3) .$$

- (2) Sia $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x > |y|\}$. Sia f integrabile su S . Stabilire se

$$g(x, y) = 4(x^2 - y^2)f(x^2 + y^2, 2xy)$$

è integrabile su S .

- (3) Sia (X, \mathcal{A}, μ) uno spazio con misura finito e $\{f_n\}$ una successione di funzioni misurabili q.o. finite tale che $f_n \rightarrow 0$ in misura.

(a) Provare che per ogni $\alpha \in (0, 2]$ vale

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X \frac{|f_n|^\alpha}{1 + f_n^2} d\mu = 0 .$$

(b) Calcolare

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X \frac{1}{1 + f_n^2} d\mu .$$

(c) Preso $\alpha > 2$, dare un esempio (di uno spazio (X, \mathcal{A}, μ) e di una successione $\{f_n\}$ soddisfacenti le ipotesi) per cui

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X \frac{|f_n|^\alpha}{1 + f_n^2} d\mu \neq 0 .$$