

**ISTITUZIONI DI ANALISI SUPERIORE 1, AA 06/067**  
**TEST N. 5 DEL 12/01/07**

- (1) Provare la seguente variante al Teorema di Convergenza Dominata.

Sia  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  uno spazio con misura. Siano  $\{f_n\}$  e  $\{g_n\}$  due successioni e  $f$ ,  $g$  due funzioni, tutte misurabili, tali che

$$\begin{aligned} f_n &\rightarrow f \text{ q.o.} , \\ g_n &\rightarrow g \text{ q.o.} , \\ |f_n| &\leq g_n \text{ per ogni } n , \\ \int g_n &\rightarrow \int g < \infty . \end{aligned}$$

Allora

$$\int f_n \rightarrow \int f .$$

- (2) Sia  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  uno spazio con misura e sia  $1 \leq p < \infty$ . Sia  $\{u_n\} \in L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$  tale che

$$u_n \rightarrow u \text{ q.o.} ,$$

dove  $u \in L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ . Provare che, se vale

$$\|u_n\|_p \rightarrow \|u\|_p ,$$

allora

$$\|u_n - u\|_p \rightarrow 0 .$$

- (3) Siano  $1 < p, q < \infty$  esponenti coniugati, siano  $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ ,  $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$ . Provare che  $f * g$  ha un rappresentante  $h$  uniformemente continuo su  $\mathbb{R}^n$  e che verifica

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} h(x) = 0 .$$