

**ISTITUZIONI DI ANALISI E GEOMETRIA,  
MOD. A, AA 13/14  
ESERCIZI DEL 08/11/13**

- (1) Sia  $f$  una funzione misurabile su uno spazio con misura  $(X, \mathcal{A}, \mu)$ . Fissato  $c \in \mathbb{R}$ , si ponga

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{f(x)} & \text{se } f(x) \in \mathbb{R} \setminus \{0\} , \\ 0 & \text{se } f(x) = \pm\infty , \\ c & \text{se } f(x) = 0 . \end{cases}$$

Provare che  $g$  misurabile.

- (2) Sia dato uno spazio con misura  $(X, \mathcal{A}, \mu)$ . Sia  $S \subset \mathbb{R}$  un insieme privo di punti interni e sia  $T = \mathbb{R} \setminus S$ . Sia  $f : X \mapsto [-\infty, +\infty]$  tale che  $\{f > t\} \in \mathcal{A}$  per ogni  $t \in T$ . Provare che  $f$  è misurabile.
- (3) Sia dato uno spazio con misura  $(X, \mathcal{A}, \mu)$ . Siano  $f_k, g_k$  funzioni misurabili quasi ovunque finite,  $k = 1, 2, \dots$ . Supponiamo  $f_k \rightarrow 0$  e  $g_k \rightarrow 0$  in misura. Provare che  $f_k g_k \rightarrow 0$  in misura.