

**ISTITUZIONI DI ANALISI E GEOMETRIA MOD A**  
**PROVA SCRITTA DEL 24/02/14**

- (1) Per ogni  $n, m \in \mathbb{N}$  sia  $a_{nm} \in \mathbb{R}$ . Fissato  $p$ ,  $1 \leq p < \infty$ , si ponga

$$A = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \sum_{m=1}^{\infty} |a_{nm}|^p \right)^{\frac{1}{p}},$$

$$B = \left( \sum_{m=1}^{\infty} \left( \sum_{n=1}^{\infty} |a_{nm}| \right)^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Stabilire se una delle due quantità,  $A$  o  $B$ , è maggiore o uguale all'altra.

**Sol.:** Siano  $X, Y$  due copie di  $\mathbb{N}$  inteso come spazio con misura con la misura che conta i punti.  $X, Y$  sono spazi  $\sigma$ -finiti e completi. Una funzione  $f$  su  $X$  non è altro che una successione di numeri  $f(n) = a_n$ , una funzione  $F$  sullo spazio prodotto  $X \times Y$  è una collezione a due indici di numeri  $F(n, m) = a_{nm}$ . Applicando la disuguaglianza di Minkovski integrale allo spazio  $X \times Y$  si ha

$$B = \left\| \int_Y |F| \right\|_{L^p(X)} \leq \int_Y \|F\|_{L^p(X)} = A.$$

- (2) Sia  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  uno spazio con misura. Siano  $\{f_n\}, \{g_n\}$  due successioni di funzioni misurabili quasi ovunque finite, tali che  $f_n \rightarrow 0, g_n \rightarrow 0$  in misura. Posto

$$h_n(x) = \max \{f_n(x), g_n(x)\}, \forall x \in X, \forall n \in \mathbb{N},$$

provare che  $h_n \rightarrow 0$  in misura.

**Sol.:** Per ogni  $\varepsilon > 0$  scomponiamo  $\{|h_n| > \varepsilon\} = \{h_n > \varepsilon > 0\} \cup \{h_n < -\varepsilon < 0\}$ . Ora se  $h_n(x) > 0$  si ha  $f_n(x) = h_n(x) > 0$  oppure  $g_n(x) = h_n(x) > 0$  quindi

$$\{h_n > \varepsilon > 0\} \subset \{f_n > \varepsilon > 0\} \cup \{g_n > \varepsilon > 0\},$$

invece, se  $h_n(x) < 0$  si ha  $f_n(x) \leq h_n(x) < \varepsilon$  e anche  $g_n(x) \leq h_n(x) < \varepsilon$ , quindi

$$\{h_n < -\varepsilon\} \subset \{f_n < -\varepsilon\} \cap \{g_n < -\varepsilon\} \subset \{f_n < -\varepsilon\} \cup \{g_n < -\varepsilon\},$$

quindi

$$\{|h_n| > \varepsilon\} \subset \{|f_n| > \varepsilon\} \cup \{|g_n| > \varepsilon\},$$

e la tesi segue.

- (3) Stabilire per quali  $c \in \mathbb{R}$  esiste finito il limite, e in tal caso calcolarlo.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{(0, \infty)} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n e^{-cx} d\mu(x) .$$

**Sol.:** La successione di funzioni  $f_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n e^{-cx}$  è una successione crescente di funzioni misurabili e nonnegative su  $(0, \infty)$ , e si ha

$$f_n(x) \nearrow f(x) = e^{(1-c)x}$$

quindi per il teorema di convergenza monotona

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{(0, \infty)} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n e^{-cx} d\mu(x) = \int_{(0, \infty)} e^{(1-c)x} d\mu(x) .$$

Quest'ultimo integrale è finito se e solo se  $c > 1$ , e in tal caso vale  $\frac{1}{c-1}$ .