

ISTITUZIONI DI ANALISI E GEOMETRIA MOD A
PROVA SCRITTA DEL 19/02/13

- (1) Fissato $a > 0$, si definisce per ricorrenza la successione di funzioni $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ponendo:

$$f_1(x) = \exp\left(-\frac{x^2}{a^2}\right), f_{n+1}(x) = f_1 * f_n(x) \quad \forall n = 1, 2, \dots$$

Stabilire per quali valori di a risulta

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} f_n = 0.$$

(Ricordare che $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$.)

Sol.: $\int_{\mathbb{R}} f_1 = a\sqrt{\pi}$ e $\int_{\mathbb{R}} f_{n+1} = \int_{\mathbb{R}} f_1 \cdot \int_{\mathbb{R}} f_n$. Quindi

$$\int_{\mathbb{R}} f_n = (a\sqrt{\pi})^n$$

che tende a 0 sse

$$a < \frac{1}{\sqrt{\pi}}.$$

- (2) Sia (X, \mathcal{A}, μ) uno spazio con misura, siano $p, q \geq 1$ due esponenti coniugati. Siano $f \in L^p(X)$, $G \in L^q(X)$ e siano $g, g_n, n = 1, 2, \dots$ funzioni misurabili tali che $g_n \rightarrow g$ q.o. su X e per ogni n valga $|g_n| \leq G$, sempre q.o. su X . Provare che

$$fg_n \rightarrow fg \text{ in } L^1(X).$$

Sol.: $|fg_n - fg| \leq 2|f|G$ e $\int_X 2|f|G \leq 2\|f\|_p\|G\|_q < \infty$. Quindi per la convergenza dominata

$$\int_X |fg_n - fg| \rightarrow 0.$$

- (3) Sia (X, \mathcal{A}, μ) uno spazio con misura completo e σ -finito. Sia $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione non-negativa. Posto

$$E = \{(x, t) \in X \times \mathbb{R} | 0 < t < f(x)\}$$

provare che se E è misurabile nello spazio prodotto $X \times \mathbb{R}$ allora f è misurabile.

Sol.: dato che $f \geq 0$ è sufficiente provare che $\{f > t\} \in \mathcal{A}$ per ogni $t > 0$. Dato che E è misurabile nello spazio prodotto, allora χ_E è una funzione misurabile nonnegativa, e per Tonelli, per quasi ogni $t > 0$ la sua t -sezione χ_{E_t} è μ -misurabile. Quindi

per q.o. $t > 0$ l'insieme E_t è μ -misurabile. Ora $E_t = \{f > t\}$ per ogni $t > 0$. Allora $\{f > t\} \in \mathcal{A}$ per quasi ogni $t > 0$. Sia $T \subset \mathbb{R}^+$ l'insieme di misura nulla t.c. $\{f > t\} \in \mathcal{A}$ per ogni $t \in \mathbb{R}^+ \setminus T$. T non ha punti interni, quindi $\mathbb{R}^+ \setminus T$ è denso in \mathbb{R}^+ . Allora per ogni $t > 0$ esiste una successione decrescente $\{t_n\} \subset \mathbb{R}^+ \setminus T$ che converge a t . Di conseguenza

$$\{f > t\} = \cup_n \{f > t_n\} \in \mathcal{A} .$$