

**ISTITUZIONI DI ANALISI E GEOMETRIA MOD A**  
**PROVA SCRITTA DEL 21/09/15**

- (1) Sia  $f \in L^1(\mathbb{R})$ , calcolare, se esiste:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} e^{-(1+x^4)^k} f(x) d\mu(x) .$$

- (2) Sia  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  uno spazio con misura completo e  $\sigma$ -finito. Sia  $F \in C^1(\mathbb{R})$  tale  $F(0) = 0$ ,  $F'(t) > 0$  per  $t > 0$  e  $F'(t) < 0$  per  $t < 0$ . Provare che, per ogni  $f$  funzione integrabile su  $X$  si ha

$$\begin{aligned} \int_X F(f) d\mu &= \int_0^{+\infty} \mu(\{x \in X | f(x) > t\}) F'(t) dt + \\ &+ \int_0^{+\infty} \mu(\{x \in X | f(x) < -t\}) (-F'(-t)) dt . \end{aligned}$$

- (3) Sia  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  uno spazio con misura. Sia  $\{f_n\}$  una successione di funzioni misurabili su  $X$ , tale che  $f_n \rightarrow 0$  in misura. Sia  $g$  una funzione integrabile su  $X$ . Provare che per ogni  $r > 0$

$$|g|^r f_n \rightarrow 0$$

in misura.