

ISTITUZIONI DI ANALISI E GEOMETRIA MOD A
PROVA SCRITTA DEL 12 SETTEMBRE 2011

- (1) Sia (X, \mathcal{A}, μ) uno spazio con misura finito. Sia $\{f_n\}$ una successione di funzioni misurabili quasi ovunque finite su X . Provare che esiste una successione di numeri positivi $\{p_n\}$ tali che

$$p_n f_n \rightarrow 0 \text{ in misura.}$$

- (2) Sia $1 \leq p < \infty$ e siano $f_n, f \in L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$, $n \in \mathbb{N}$ tali che $\|f_n - f\|_p \rightarrow 0$ in norma p . Siano $g_n, g \in L^\infty(X, \mathcal{A}, \mu)$, $n \in \mathbb{N}$ tali che esiste $M > 0$ per cui $\|g_n\|_\infty \leq M$ per ogni n e $g_n \rightarrow g$ quasi ovunque. Provare che

$$\|f_n g_n - f g\|_p \rightarrow 0 .$$

- (3) Sia $\varphi \in L^1(\mathbb{R}^n)$ tale che $\varphi(x) = 0$ per ogni $x, |x| > 1$ e $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi = 0$. Per ogni $\varepsilon > 0$ si ponga

$$\varphi_\varepsilon(x) = \varepsilon^n \varphi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) .$$

Posto $1 \leq p < \infty$ e presa $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, provare che

$$\|\varphi_\varepsilon * f\|_p \rightarrow 0 .$$