

ISTITUZIONI DI ANALISI E GEOMETRIA MOD A
PROVA SCRITTA DEL 01/03/11
CON SOLUZIONI

(1) Sia $K = K(x, y) \in L^2(\mathbb{R}^2)$. Per ogni $f \in L^2(\mathbb{R})$ si ponga

$$T[f](x) = \int_{\mathbb{R}} K(x, y) f(y) d\mu(y) .$$

(a) Provare che, per ogni $f \in L^2(\mathbb{R})$, $T[f] \in L^2(\mathbb{R})$ e che vale

$$\|T[f]\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq \|K\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \|f\|_{L^2(\mathbb{R})} .$$

(b) Provare che l'insieme

$$\mathcal{T} = \{T[f] | f \in L^2(\mathbb{R}), \|f\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq 1\} .$$

è relativamente compatto in $L^2(\mathbb{R})$.

SOLUZIONE (traccia). (a) Per la caratterizzazione duale della norma L^2 , è sufficiente provare la seguente stima per le funzioni $f, g \in L^2(\mathbb{R})$ che siano anche semplici

$$\int_{\mathbb{R}} g(x) d\mu(x) \int_{\mathbb{R}} K(x, y) f(y) d\mu(y) \leq \|K\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \|f\|_{L^2(\mathbb{R})} \|g\|_{L^2(\mathbb{R})}$$

questa si ricava dal teorema di Tonelli, osservando che la funzione $K(x, y)g(x)f(y)$ è integrabile su \mathbb{R}^2 e vale per Hölder

$$\int_{\mathbb{R}^2} |g(x)K(x, y)f(y)| d\mu(x, y) \leq \|K\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \|f\|_{L^2(\mathbb{R})} \|g\|_{L^2(\mathbb{R})} .$$

(b) Si tratta di applicare la disuguaglianza precedente con varie scelte di K per verificare le ipotesi del teorema di M. Riesz. Per l'equilimitatezza nel senso di L^2 si usa K stesso. Per l'equicontinuità nel senso di L^2 si usa $K(x+h, y) - K(x, y)$. Per la proprietà sull'andamento equiinfinitesimo all' ∞ nel senso di L^2 si usa $(1 - \chi_{(-R, R)}(x))K(x, y)$.

(2) Sia (X, \mathcal{A}, μ) uno spazio con misura. Sia $\{E_n\} \subset \mathcal{A}$ una successione di insiemi misurabili tale che

$$\sum_n \mu(E_n) < \infty .$$

Provare che, posto $E = \limsup_{n \rightarrow \infty} E_n$ vale

$$\mu(E) = 0 .$$

SOLUZIONE . $E = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} E_k$, quindi $E \subset \bigcup_{k=n}^{\infty} E_k$ per ogni n , da cui

$$\mu(E) \leq \sum_{k=n}^{\infty} \mu(E_k) \rightarrow 0$$

per $n \rightarrow \infty$.

- (3) Sia $B = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid |x| < 1\}$ e si definisca per induzione la successione $\{f_k\}$ di funzioni su \mathbb{R}^2 nel seguente modo

$$f_1 = \chi_B, f_{k+1} = \chi_B * f_k .$$

Calcolare, per ogni k , $\int f_k$ e determinare qual è l'insieme di livello $\{f_k > 0\}$.

SOLUZIONE (traccia). Si ha $\int f_1 = \pi$ e $\int f_{k+1} = \int \chi_B \int f_k = \pi \int f_k$ quindi $\int f_k = \pi^k$. Poi si osserva che $\{f_1 > 0\} = B$ e che, per $k > 1$ f_k è continua, quindi tutti gli insiemi $\{f_k > 0\}$ sono aperti. Allora

$$\{f_{k+1} > 0\} = \{x \mid \text{dist}(x, \{f_k > 0\}) < 1\}$$

cioè, posto $B_k = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid |x| < k\}$, per induzione si ottiene $\{f_k > 0\} = B_k$.