

**ISTITUZIONI DI ANALISI SUPERIORE 1, AA 04/05**  
**TEST N. 1 DEL 09/11/04**

- (1) Provare che la famiglia  $\mathcal{F}$  di sottoinsiemi di  $\mathbb{R}^n$  data da  
 $\mathcal{F} = \{U \subset \mathbb{R}^n \mid \text{esiste } K = 1, 2, \dots \text{ ed esistono intervalli } I_1, \dots, I_K \text{ tali che } U = \cup_{k=1}^K I_k\}$   
costituisce un'algebra.
- (2) Sia  $\mathcal{F}$  come sopra, sia  $U \in \mathcal{F}$ , provare che esiste una famiglia finita  $\{J_l\}_{l=1}^L$  di intervalli a due a due disgiunti tali che  $U = \cup_{l=1}^L J_l$ .
- (3) Provare che se gli intervalli  $I_k$ ,  $J_l$  sono tali che  $\cup_{l=1}^L J_l = \cup_{k=1}^K I_k$  e gli intervalli  $J_l$  sono a due a due disgiunti, allora vale

$$\sum_{l=1}^L \lambda(J_l) \leq \sum_{k=1}^K \lambda(I_k),$$

dove con  $\lambda(\cdot)$  si indica la lunghezza degli intervalli.

- (4) Sia  $\mathcal{F}$  come sopra, sia  $U \in \mathcal{F}$ , e sia  $\{J_l\}_{l=1}^L$  una famiglia finita di intervalli a due a due disgiunti tali che  $U = \cup_{l=1}^L J_l$ . Provare che

$$\nu(U) = \sum_{l=1}^L \lambda(J_l)$$

é una funzione d'insieme ben definita su  $\mathcal{F}$  e che verifica gli assiomi di misura su un'algebra.