

ISTITUZIONI DI ANALISI SUPERIORE 1, AA 05/06
TEST N. 4 DEL 15/12/06

- (1) Sia $1 < p < \infty$ e siano $f, g \in L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$. Posto $F(t) = \int_X |f + tg|^p d\mu$, $t \in \mathbb{R}$, provare che F è derivabile e calcolare $\frac{d}{dt}F(0)$.
- (2) Siano $f_1, \dots, f_N \in L^N(X, \mathcal{A}, \mu)$, $N = 1, 2, \dots$. Provare la disuguaglianza

$$\left| \int_X \prod_{i=1, \dots, N} f_i \right| \leq \prod_{i=1, \dots, N} \|f_i\|_N .$$

- (3) Sia $1 \leq p < \infty$ e sia $f \in L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ una funzione nonnegativa. Posto $\mu_f(t) = \mu(f > t)$, $\forall t \geq 0$, provare l'identità

$$\|f\|_p = \left(\int_0^\infty p t^{p-1} \mu_f(t) dt \right)^{1/p} .$$