

**ISTITUZIONI DI ANALISI E GEOMETRIA MOD A**  
**PROVA SCRITTA DEL 23 GENNAIO 2012**

- (1) Sia  $f \geq 0$  una funzione integrabile su uno spazio con misura  $(X, \mathcal{A}, \mu)$ . Per ogni  $E \in \mathcal{A}$  si ponga

$$\nu(E) = \int_E f d\mu .$$

Provare che:

- (i)  $\nu$  è una misura finita.
- (ii) Se vale  $\nu(E) \leq \mu(E)$  per ogni  $E \in \mathcal{A}$ , allora si ha

$$\|f\|_\infty \leq 1 .$$

- (iii) Se, per un dato  $\delta$ ,  $0 < \delta < 1$  vale  $\nu(E) \leq \mu(E)^{1-\delta}$  per ogni  $E \in \mathcal{A}$ , allora  $f \in L^p$  per ogni  $p < \frac{1}{\delta}$ .

**Sol. (traccia):** (i) si verificano in modo diretto gli assiomi.

- (ii) Per ogni  $t$ ,  $0 < t < \|f\|_\infty$  si pone  $E_t = \{f > t\}$  e si osserva che  $\mu(E_t) > 0$ . Per Chebishev

$$t\mu(E_t) \leq \nu(E_t) \leq \mu(E_t)$$

da cui  $t \leq 1$ , ovvero  $\|f\|_\infty \leq 1$ .

- (iii) Per ogni  $t \geq 0$  si ponga di nuovo  $E_t = \{f > t\}$ . Per Chebishev

$$\mu(E_t) \leq t^{-1} \mu(E_t)^{1-\delta}$$

cioè  $\mu(E_t) \leq t^{-\frac{1}{\delta}}$ . Notare che, detta  $\mu_f$  la funzione distribuzione di  $f$ , si ha  $\mu_f(t) = \mu(E_t) \leq t^{-\frac{1}{\delta}}$ . Ricordando che

$$\int_X |f|^p = \int_0^\infty p t^{p-1} \mu_f(t) dt$$

si ottiene

$$\begin{aligned} \int_X |f|^p &\leq \int_0^1 p \mu_f(t) dt + \int_1^\infty p t^{p-1} \mu_f(t) dt \leq \\ &\leq p \left( \int_X f + \int_1^\infty t^{p-\frac{1}{\delta}-1} dt \right) \end{aligned}$$

e la tesi segue.

- (2) Sia  $1 < p < \infty$  e sia  $q$  l'esponente coniugato. Siano  $f \in L^p(\mathbb{R}^n), g \in L^q(\mathbb{R}^n)$ .

(i) Provare che

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f * g(x) = 0 .$$

(ii) Stabilire se la stessa cosa vale nel caso  $p = 1, q = \infty$ .

**Sol. (traccia):** (i) La tesi è vera se  $f, g$  sono nulle fuori da un insieme compatto, le funzioni  $C^\infty$  a supporto compatto sono dense in  $L^p(\mathbb{R}^n)$  e in  $L^q(\mathbb{R}^n)$ , dato che  $1 < p, q < \infty$ .

(ii) No. Esempio:  $f = \chi_{B_1(0)}, g \equiv 1$ .

- (3) Per ogni  $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$  si indichi con  $\omega_f$  il modulo di continuità in  $L^1$  per  $f$ . Siano  $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$  tali che  $\|f\|_1, \|g\|_1 \leq 1$ . Posto  $h = f * g$  provare che

$$\omega_h \leq \min \{ \omega_f, \omega_g \} .$$

**Sol. (traccia):** Per la disuguaglianza di Young

$$\|h(\cdot - z) - h(\cdot)\|_1 \leq \omega_f(|z|)\|g\|_1 \leq \omega_f(|z|)$$

analogamente, dato che  $f * g = g * f$ ,

$$\|h(\cdot - z) - h(\cdot)\|_1 \leq \omega_g(|z|)$$

e segue la tesi.