

ISTITUZIONI DI ANALISI E GEOMETRIA MOD A
AA 2012/13
ESERCIZI FOGLIO N. 1

- (1) Sia μ^* una misura esterna su X . Siano $E, F \subset X$ due sottoinsiemi μ^* -misurabili e disgiunti. Siano $A, B \subset X$ due sottoinsiemi non necessariamente μ^* -misurabili tali che $A \subset E$, $B \subset F$. Provare che

$$\mu^*(A \cup B) = \mu^*(A) + \mu^*(B) .$$

- (2) Siano rispettivamente μ^*, μ, \mathcal{L} misura esterna, misura e σ -algebra di Lebesgue di \mathbb{R}^n . per ogni $E \subset \mathbb{R}^n$ si ponga

$$\bar{\mu}(E) = \inf \left\{ \sum_k \mu(A_k) \mid \{A_k\} \subset \mathcal{L}, E \subset \bigcup_k A_k \right\} .$$

Provare che $\bar{\mu} = \mu^*$.

- (3) Siano dati $a_1, \dots, a_n > 0$ e sia $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ la trasformazione lineare data da $Tx = (a_1x_1, \dots, a_nx_n)$. Provare che se E è misurabile secondo Lebesgue, anche l'insieme

$$TE = \{x = Ty \mid y \in E\}$$

è misurabile e vale

$$\mu(TE) = \prod_{i=1}^n a_i \mu(E) .$$