

ISTITUZIONI DI ANALISI E GEOMETRIA MOD A
AA 2011/12
ESERCIZI FOGLIO N. 3

- (1) Siano f, g due funzioni integrabili su \mathbb{R} tali che $\int_{\mathbb{R}} f = \int_{\mathbb{R}} g = 1$.
Preso una matrice invertibile

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

stabilire se la funzione

$$F(x, y) = f(ax + by)g(cx + dy)$$

è integrabile su \mathbb{R}^2 e se si calcolarne l'integrale.

- (2) Siano $p_1, \dots, p_k \geq 1$ tali che

$$\sum_{j=1}^k \frac{1}{p_j} = 1 .$$

Provare che prese f_1, \dots, f_k funzioni misurabili su (X, \mathcal{A}, μ) vale

$$\int \left| \prod_{j=1}^k f_j \right| \leq \prod_{j=1}^k \|f_j\|_{p_j} .$$

- (3) Sia (X, \mathcal{A}, μ) uno spazio con misura finito e completo. Sia $f \geq 0$ misurabile su X , e sia

$$\mu_f(t) = \mu(\{f > t\})$$

la sua funzione distribuzione. Provare la seguente identità

$$\int_X e^{f(x)} d\mu(x) = \mu(X) + \int_0^{+\infty} \mu_f(t) e^t dt .$$