

ISTITUZIONI DI ANALISI E GEOMETRIA MOD A
PROVA SCRITTA DEL 30/6/14

- (1) Sia $E \subset \mathbb{R}^n$ tale che $\mu^*(E) < \infty$, dove μ^* è la misura esterna di Lebesgue. Provare che se per ogni $\varepsilon > 0$ esistono U, V unioni finite di intervalli tali che

$$\mu^*(E \setminus V) \leq \varepsilon, \quad \mu^*(U \setminus E) \leq \varepsilon, \quad \mu^*(V \setminus U) \leq \varepsilon,$$

allora E è misurabile secondo Lebesgue.

- (2) Sia $F \in L^1(\mathbb{R}^2)$ tale che

$$\int_{\mathbb{R}^2} F(u, v) d\mu(u, v) = 1,$$

stabilire se esistono finiti e, in tal caso, calcolare i seguenti integrali

$$\int_{(0, +\infty) \times (0, 2\pi)} F(x \cos y, x \sin y) |x| d\mu(x, y),$$

$$\int_{(-\infty, +\infty) \times (0, 2\pi)} F(x \cos y, x \sin y) |x| d\mu(x, y).$$

- (3) Dato uno spazio con misura (X, \mathcal{A}, μ) siano f_n, f funzioni misurabili su X tali che esiste g integrabile su X per cui

$$|f_n| \leq g, \text{ q.o.}, \forall n = 1, 2, \dots$$

e inoltre

$$f_n \rightarrow f \text{ in misura.}$$

Provare che esiste una sottosuccessione $\{f_{n_k}\}$ tale che

$$f_{n_k} \rightarrow f \text{ in norma } L^1.$$