ISTITUZIONI DI ANALISI E GEOMETRIA MOD A
PROVA SCRITTA DEL 18/01/16

(1) Sia $f_0 \in L^1(\mathbb{R}^n)$, tale che $f_0 \geq 0$ q.o. e $\int_{\mathbb{R}^n} f_0 = 1/2$. Si definisce per ricorrenza la successione di funzioni $f_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ponendo:

$$f_{k+1}(x) = f_k * f_k(x) \ \forall k = 0, 1, 2, \dots \ .$$

Stabilire se la successione di funzioni $\{f_k\}$ converge in $L^1(\mathbb{R}^n)$, e se sì a quale limite.

Sol.: Per induzione si verifica che $f_k \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e $f_k \geq 0$ per ogni k. Si ponga $I_k = \int_{\mathbb{R}^n} f_k$, abbiamo $I_0 = 1/2$ e

$$I_{k+1} = I_k^2 \ \forall k = 0, 1, 2, \dots \ .$$

Quindi $I_1 = 1/4, I_2 = 1/16$ e, per induzione:

$$I_k = 2^{-2^k} \ \forall k = 0, 1, 2, \dots \ .$$

Da cui $f_k \to 0$ in $L^1(\mathbb{R}^n)$.

(2) Sia $f \in L^3(\mathbb{R})$. Determinare, se esiste,

$$\lim_{k\to\infty} \mu(\{f > 10 - e^{-k}\}) \ .$$

Sol.: Per Chebyshev, per ogni $t > 0$ l'insieme di livello $\{f > t\}$ ha misura finita. Sia $E_k = \{f > 10 - e^{-k}\}$, questa è una successione decrescente di insiemi misurabili di misura finita e vale

$$\cap_k E_k = \{f \geq 10\} \ .$$

Quindi

$$\lim_{k\to\infty} \mu(\{f > 10 - e^{-k}\}) = \mu(\{f \geq 10\}) \ .$$

(3) Sia $(X, \mathcal{A}, \mu)$ uno spazio con misura. Siano $\{f_n\}, \{g_n\}$ successioni di funzioni misurabili su X, tali che

$$f_n \to 0, g_n \to 0 \text{ in misura} \ .$$

Stabilire se vale

$$\max\{f_n^2, g_n^2\} \to 0 \text{ in misura} \ .$$

Sol.: Per ogni $\varepsilon > 0$ si consideri l'insieme $\{\max\{f_n^2, g_n^2\} > \varepsilon\}$. Abbiamo

$$\{\max\{f_n^2, g_n^2\} > \varepsilon\} \subset \{f_n^2 > \varepsilon\} \cup \{g_n^2 > \varepsilon\} =$$
$$= \{|f_n| > \sqrt{\varepsilon}\} \cup \{|g_n| > \sqrt{\varepsilon}\}$$

e per ipotesi

$$\lim_{n\to\infty} \mu(\{|f_n| > \sqrt{\varepsilon}\}) = \lim_{n\to\infty} \mu(\{|g_n| > \sqrt{\varepsilon}\}) = 0$$

segue la tesi.