ISTITUZIONI DI ANALISI E GEOMETRIA MOD A
PROVA SCRITTA DEL 01/02/16

(1) Siano f, g misurabili su $\mathbb{R}^n$ ed esistano $a, b > 0$ tali che

$$|f(x)| \leq e^{-a|x|^2}, |g(x)| \leq e^{-b|x|^2}, \text{ per ogni } x \in \mathbb{R}^n .$$

(i) Stabilire se esistono $c > 0, K > 0$ per cui valga

$$|f * g(x)| \leq K e^{-c|x|^2}, \text{ per ogni } x \in \mathbb{R}^n .$$

(ii) Determinare c e K.

(2) Si ponga $\mathbb{S}^2 = \partial B_1(0) \subset \mathbb{R}^3$. Sia

$$E = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 | 0 < |x| < g(\frac{x}{|x|}) \right\}$$

dove $g \geq 0$ è una funzione misurabile su $\mathbb{S}^2$. Provare che E è misurabile in $\mathbb{R}^3$ e che vale

$$\mu_3(E) = \int_{\mathbb{S}^2} \frac{g^3}{3} \mathrm{d}\mu_2 ,$$

qui con μ_3 si intende la misura di Lebesgue su $\mathbb{R}^3$ e con μ_2 la misura su $\mathbb{S}^2$.

(3) Sia $(X, \mathcal{A}, \mu)$ uno spazio con misura. Siano $f \in L^p(X), g \in L^q(X)$ con $1 \leq p, q \leq \infty$, non necessariamente coniugati. Stabilire se esiste $\alpha > 0$ tale che $|fg|^\alpha$ è integrabile.