

V spazio vettoriale sul campo $\mathbb{R}$.

Supponiamo che V ammetta un sistema di generatori formato da un numero finito di vettori.

~~$\{v_1, \dots, v_r\} \in V$~~ ~~linearmente indipendenti~~

~~$\{u_1, \dots, u_s\} \in V$~~ sia un sistema di generatori di V .

Allora $r \leq s$.

Dim. $v_1 = \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_s u_s$ perché G è sist. di gen. per V .

$v_1 \neq 0_V$ perché è linearmente indipendente. SPIEGARE

$\Rightarrow$ qualche $\lambda_k \neq 0$. Sia $\lambda_1 \neq 0$. Allora

$$\lambda_1 u_1 = v_1 - \lambda_2 u_2 - \dots - \lambda_s u_s \quad \Downarrow \quad \text{ho } \lambda_1^{-1} \in \mathbb{R}$$

$$\lambda_1^{-1}(\lambda_1 u_1) = \lambda_1^{-1}(v_1 - \lambda_2 u_2 - \dots - \lambda_s u_s)$$

$$\underbrace{(\lambda_1^{-1} \lambda_1)}_{=1} u_1 = \lambda_1^{-1} v_1 - \lambda_1^{-1} \lambda_2 u_2 - \dots - \lambda_1^{-1} \lambda_s u_s$$

$$u_1 = \underbrace{\lambda_1^{-1} v_1}_{\in \mathbb{R}} - \underbrace{(\lambda_1^{-1} \lambda_2)}_{\in \mathbb{R}} u_2 - \dots - \underbrace{(\lambda_1^{-1} \lambda_s)}_{\in \mathbb{R}} u_s$$

Allora $G' = \{v_1, u_2, \dots, u_s\}$ è un sistema di generatori per V . Infatti, prendi $w \in V$ arbitrario. Allora

$$w = \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_s u_s =$$

$$= \alpha_1 (\lambda_1^{-1} v_1 - \lambda_1^{-1} \lambda_2 u_2 - \dots - \lambda_1^{-1} \lambda_s u_s) + \alpha_2 u_2 + \dots + \alpha_s u_s$$

$$= (\alpha_1 \lambda_1^{-1}) v_1 + (\alpha_2 - \alpha_1 \lambda_1^{-1} \lambda_2) u_2 + \dots + (\alpha_s - \alpha_1 \lambda_1^{-1} \lambda_s) u_s$$

Per tanto $v_1 = \beta_1 v_1 + \beta_2 u_2 + \dots + \beta_s u_s$

$v_2 \neq 0$ perché è linearmente indipendente. 3/10/16(2)

Dunque qualche β_j è $\neq 0$. Possiamo supporre che sia $\beta_j \neq 0$ con $j \geq 2$.

Infatti, se per assurdo $\beta_2 = \dots = \beta_s = 0$, allora $\beta_1 \neq 0$ e si avrebbe

$$v_2 = \beta_1 v_1 \iff \beta_1 v_1 - v_2 = 0 \quad \text{con } \beta_1 \neq 0 \text{ (e anche } -1 \neq 0)$$

Allora v_1, v_2 sarebbero linearmente dipendenti.

SPIEG. Quindi, anche $v_1, v_2, \dots, v_s$ sarebbero lin. dipend., assurdo.

Supponiamo sia $\beta_2 \neq 0$. Allora

$$\beta_2 u_2 = -\beta_1 v_1 + v_2 - \beta_3 u_3 - \dots - \beta_s u_s \quad / \cdot \beta_2^{-1}$$

$$\boxed{u_2 = -\beta_2^{-1} \beta_1 v_1 - \beta_2^{-1} v_2 - \beta_2^{-1} \beta_3 u_3 - \dots - \beta_2^{-1} \beta_s u_s}$$

Quindi $\{v_1, v_2, u_3, \dots, u_s\}$ è un sistema di generatori per V .

"e così via", cioè

Supponiamo di aver dimostrato che per un certo numero naturale p , con $1 \leq p < r$ si abbia che $G'' = \{v_1, \dots, v_p, u_{p+1}, \dots, u_s\}$ è un sistema di generatori di V . Allora

$$v_{p+1} = \gamma_1 v_1 + \dots + \gamma_p v_p + \gamma_{p+1} u_{p+1} + \dots + \gamma_s u_s \quad \gamma_i \in \mathbb{R}$$

$v_{p+1} \neq 0$ perché è linearmente indipendente.

Allora qualche γ_i è $\neq 0$.

Se fosse $\gamma_{p+1} = \dots = \gamma_s = 0$ allora si avrebbe

$$v_{p+1} = \gamma_1 v_1 + \dots + \gamma_p v_p \iff \gamma_1 v_1 + \dots + \gamma_p v_p + \underbrace{(-1)}_0 v_{p+1} = 0$$

e quindi $v_1, \dots, v_p$ non sarebbero linearmente indipendenti. Assurdo.

Per fissare le idee, sia $\gamma_{p+1} \neq 0$. Allora da

$$\gamma_{p+1} u_{p+1} = -\gamma_1 v_1 - \dots - \gamma_p v_p + v_{p+1} - \gamma_{p+2} u_{p+2} - \dots - \gamma_s u_s$$

segue

$$u_{p+1} = -\gamma_{p+1}^{-1} \gamma_1 v_1 - \dots - \gamma_{p+1}^{-1} \gamma_p v_p + \gamma_{p+1}^{-1} v_{p+1} - \gamma_{p+1}^{-1} \gamma_{p+2} u_{p+2} - \dots$$

$$- \gamma_{p+1}^{-1} \gamma_s u_s$$

Quindi

$\{v_1, \dots, v_p, v_{p+1}, u_{p+2}, \dots, u_s\}$ è un sistema di generatori per V .

Ad ogni passo "scambiamo" un "u" con un "v".

L'unica cosa che può fermare questo procedimento è aver finito tutti i "v". Quindi $R \leq s$. ■

OSSERVAZIONE

Quello che si dimostra effettivamente è che

$\{v_1, \dots, v_p, u_{p+1}, \dots, u_s\}$ è un sistema di generatori di V per ogni $p = 1, \dots, R$ "B_p" PROPRIETÀ che dipende dall'inter $p \geq 1$

Abbiamo prima provato il caso $p=1$. (Forse il caso $p=2$ per coprire un po' meglio). Infine abbiamo visto come $B_p \Rightarrow B_{p+1}$ vera. Una dim. per INDUZIONE.

V spazio vettoriale $G = \{u_1, \dots, u_s\}$ sist. di generatori di V

Il Teorema dello scambio ci dice che in V riusciamo a trovare al più s vettori linearmente indipendenti tra loro. Cioè

$v_1 \in V$ $v_1 \neq 0$ (allora v_1 è LIN. INDIP.)

$v_1, v_2 \in V$ LIN. INDIP.

$v_1, v_2, v_3 \in V$ ———

Dopo un numero finito di passi (al più s) questo procedimento non si può ripetere. Abbiamo trovato un insieme di vettori di V , LIN. INDIP. tra loro, massimale. Cioè che non è $\subsetneq$ in un insieme di vettori LIN. INDIP.

PROPOSIZIONE Ogni insieme I di vettori LIN. INDIP. massimale di uno sp. vett. V è un sistema di generatori di V .

Dim.

$I = \{v_1, \dots, v_m\}$ $v_1, \dots, v_m$ LIN. INDIP.

Sia $w \in V$ qualsiasi. Allora, per ipotesi, $v_1, \dots, v_m, w$ non sono LIN. INDIP. Cioè esistono $\alpha_1, \dots, \alpha_m, \beta \in \mathbb{R}$ non tutti nulli, tali che

$$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_m v_m + \beta w = 0_V$$

Se fosse $\beta = 0$, allora $v_1, \dots, v_m$ non sarebbero LIN. INDIP. perché qualche α_i è $\neq 0$. Assurdo. Allora $\beta \neq 0$

$$\beta w = -\alpha_1 v_1 - \dots - \alpha_m v_m \quad / \beta^{-1} \Rightarrow w = \underbrace{\left(-\frac{\alpha_1}{\beta}\right)}_{\in \mathbb{R}} v_1 - \dots - \underbrace{\left(-\frac{\alpha_m}{\beta}\right)}_{\in \mathbb{R}} v_m$$

Dunque: ogni el. t di V è combinazione lineare di $v_1, \dots, v_m$. ■

Avevamo anche visto

PROPOSIZIONE Sia $u_1, \dots, u_m \in V$ sp. vett un sistema di generatori minimale di V ("minimale" significa che se si elimina da $\{u_1, \dots, u_m\}$ anche un solo elemento, allora quel che resta non è un sist. di gen. di V . Allora $u_1, \dots, u_m$ sono L.I.V. INDIP.

Def. Un sistema di generatori per V formato da vettori linearmente indipendenti tra loro si chiama base di V .

- Se $\{v_1, \dots, v_n\}$ è una base di V , allora ogni $w \in V$ è comb. lineare di $v_1, \dots, v_n$ in modo unico.
- Ogni spazio vettoriale ammette (almeno) una base.
Infatti abbiamo supposto che ogni spazio vettoriale che consideriamo ammette un sistema di generatori finiti. Preso un tale s.d.g., lo "sforziamo".

D'ora in poi supporremo sempre che gli spazi Vettoriali V su $\mathbb{R}$ che ci interessano abbiano ~~lo stesso numero~~ un sistema di generatori finito

SPIEGARE.

INSERIRE QUI FOGLIO (3,5)

COROLLARIO

Due qualsiasi basi B_1, B_2 di V hanno lo stesso numero di elementi.

Dim.

$$\left. \begin{array}{l} B_1 = "I" \quad B_2 = "G" \implies \# B_1 \leq \# B_2 \\ B_2 = "I" \quad B_1 = "G" \implies \# B_2 \leq \# B_1 \end{array} \right\} \implies \# B_1 = \# B_2$$

■

Questo numero naturale associato a V (cioè $\# B$, dove B è una qualsiasi base di V) è importantissimo! si chiama la dimensione di V : $\dim(V)$

ESEMPLI

1) $V = \{0\} \quad B = \emptyset \iff \dim(V) = 0$

2) $\mathbb{R}^n \quad e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad \dots \quad e_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{è base di } \mathbb{R}^n$

Quindi $\dim(\mathbb{R}^n) = n$

3) $\mathcal{S} \subset M(2 \times 2) \quad \mathcal{Q} \subset M(2 \times 2) \quad \dim(M(2 \times 2)) = 4$
 $\dim(\mathcal{S}) = 3 \quad \dim(\mathcal{Q}) = 1$

~~COROLLARIO (TEOREMA del COMPLEMENTO ad una BASE)~~

~~Siano $v_1, v_2 \in V$ lin. indipendenti e sia $B = \{u_1, \dots, u_n\}$ una qualsiasi base di V (ovvero $\dim(V) = n$). Allora esistono $n-2$ elementi di B , siano $u_{i_1}, \dots, u_{i_{n-2}}$~~