

V spazio vettoriale.

- $I \subset V$ insieme di vettori L.I.W. INDIP. } $\Rightarrow \#I \leq \#G$
 $G \subset V$ sistema di generatori.

- BASE di V è $\{v_1, \dots, v_n\} \subset V$ tale che

- $v_1, \dots, v_n$ L.I.W. INDIP.

- $v_1, \dots, v_n$ generano V (CIOÈ: —)

- Ogni spazio vettoriale ha (almeno) una base
 (Nel caso nostro ne ha sempre infinite. Quindi si parla di "UNA base", mai dire "LA base")

- Due basi qualsiasi di V hanno lo stesso numero di elementi.

Tale numero è detto dimensione di V $\dim(V)$.

- Sia V spazio vettoriale di dimensione n

- Se $u_1, \dots, u_n \in V$ sono L.I.W. INDIP., allora $\{u_1, \dots, u_n\}$ è base di V .

- Se $w_1, \dots, w_m \in V$ è un sistema di generatori di V , allora $\{w_1, \dots, w_m\}$ è base di V . SPIEG.

$\left\{ \begin{vmatrix} 2 \\ 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \end{vmatrix} \right\}$ è base di $\mathbb{R}^2$

$$a \begin{vmatrix} 2 \\ 1 \end{vmatrix} + b \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix} \quad \begin{cases} 2a+b=0 \\ a+b=0 \end{cases} \quad a=0 \Rightarrow b=0$$

i due vettori sono lin. indipendenti

$$a \begin{vmatrix} 2 \\ 1 \end{vmatrix} + b \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c \\ d \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} c \\ d \end{vmatrix} \in \mathbb{R}^2 \text{ qualsiasi.}$$

$$\left| \begin{array}{cc|c} 2 & 1 & c \\ 1 & 1 & d \end{array} \right| \rightsquigarrow \left| \begin{array}{cc|c} 1 & 1 & d \\ 2 & 1 & c \end{array} \right| \rightsquigarrow \left| \begin{array}{cc|c} 1 & 1 & d \\ 0 & -1 & c-2d \end{array} \right| \rightsquigarrow \left| \begin{array}{cc|c} 1 & 1 & d \\ 0 & 1 & 2d-c \end{array} \right| \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow \left| \begin{array}{cc|c} 1 & 0 & c-d \\ 0 & 1 & 2d-c \end{array} \right|$$

$$\begin{cases} a = c-d \\ b = 2d-c \end{cases}$$

← SPIEGARE
SIGNIFICATO

i due vettori formano un sistema di generatori.

Quunque $\begin{pmatrix} v_1 & v_2 \end{pmatrix}$ formano una base di $\mathbb{R}^2$

$$\begin{vmatrix} 4 \\ 3 \end{vmatrix} \quad a = c-d = 4-3=1 \quad \text{Verificare} \quad 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 \\ 1 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 \\ 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 \\ 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 \\ 3 \end{vmatrix}$$

$$b = 2d-c = 6-4=2$$

$(1,2)$ si dicono coordinate del vettore $u = \begin{vmatrix} 4 \\ 3 \end{vmatrix}$ rispetto

alla base v_1, v_2 . Rispetto alla base canonica $e_1 = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix}$,

$e_2 = \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix}$, le coordinate di u sono $(4,3)$.

ESERCIZIO

Per quali valori di $t \in \mathbb{R}$ $\left\{ \begin{vmatrix} 1 \\ t \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} t \\ 3 \end{vmatrix} \right\}$ è base di $\mathbb{R}^2$?

Sono due vettori e $\dim(\mathbb{R}^2) = 2$. Allora formano una base se e solo se sono linearmente indipendenti

$$a \begin{vmatrix} 1 \\ t \end{vmatrix} + b \begin{vmatrix} t \\ 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix} \quad \begin{cases} a+bt=0 \\ at+3b=0 \end{cases}$$

4/10/16 (3)

è un sistema lineare omogeneo nelle
incognite a, b .

$$\begin{vmatrix} 1 & t \\ t & 3 \end{vmatrix} \rightsquigarrow \begin{vmatrix} 1 & t \\ 0 & 3-t^2 \end{vmatrix}$$

quindi il sistema lin.
dat è equivalente a

$$\begin{cases} a + tb = 0 \\ (3-t^2)b = 0 \end{cases}$$

Negli che quest'altra come
unica soluzione $a=0, b=0$

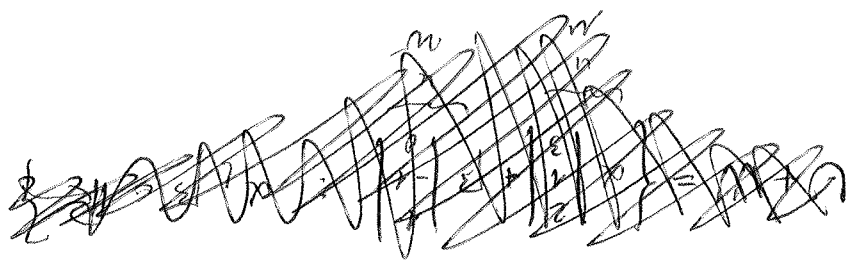
Allora deve essere $3-t^2 \neq 0 \Rightarrow b=0 \Rightarrow a=0$

$$\boxed{3-t^2=0 \Leftrightarrow t^2=3 \Leftrightarrow t=\pm\sqrt{3}}$$

EXE

Verifica che $\left\{ \begin{vmatrix} a \\ b \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} c \\ d \end{vmatrix} \right\}$ è una base di $\mathbb{R}^2$

$$\Leftrightarrow ad - bc \neq 0$$



ESERCIZIO $\mathbb{R}^3$ e_1, e_2, e_3 la base canonica 4/10/16 (4)

$B = \{v_1 = e_1, v_2 = e_1 + e_2, v_3 = e_1 + e_2 - e_3\}$ è base di $\mathbb{R}^3$?

Ogni base di $\mathbb{R}^3$ è formata da tre vettori di $\mathbb{R}^3$.

Con meno di tre vettori non è possibile generare $\mathbb{R}^3$.

Verifichiamo che $\text{Span}(B) = \mathbb{R}^3$, cioè —

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad v_2 = e_1 + e_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad v_3 = e_1 + e_2 - e_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$w = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$ arbitrario. Cerco $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ tali che

$$w = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 \quad \text{cioè} \quad \alpha_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \quad (*)$$

Gli zeri nascenti suggeriscono:

— la scelta di α_3 è obbligata: $\boxed{\alpha_3 = -c}$

la situazione si trasforma così:

$$\alpha_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c \\ c \\ -c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+c \\ b+c \\ 0 \end{bmatrix}$$

la scelta di α_2 è obbligata

$$\boxed{\alpha_2 = b+c}$$

$$\alpha_1 = a+c - (b+c) = a-b$$

$$\boxed{\alpha_2 = a-b}$$

Altrimenti, (*) si trasforma in

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = a \\ \alpha_2 + \alpha_3 = b \\ -\alpha_3 = c \end{cases}$$

che risolt fornisce

Oppure $v_2 - v_1 = -v_1 + v_2 = e_2$ $v_3 - v_2 = -e_3$ $v_2 - v_3 = e_3$

Cioè $\underbrace{e_1, e_2, e_3}_{\text{base di } \mathbb{R}^3} \in \text{Span}(B)$

$$\Rightarrow \text{Span}(B) = \mathbb{R}^3$$

Notando in dettaglio

$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ qualsiasi

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = a e_1 + b e_2 + c e_3 = a v_1 + b(v_2 - v_1) +$$

SPIEGARE i vantaggi della
base canonica

$$c(v_2 - v_3) =$$

$$= a v_1 + b v_2 - b v_1 + c v_2 - c v_3 = (a - b) v_1 + (b + c) v_2 - c v_3$$

(discorso su ieri)

Dunque B genera $\mathbb{R}^3$; B è sist. di gen. minimale di $\mathbb{R}^3 \Rightarrow B$ è una base di $\mathbb{R}^3$.

Oppure

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 e_1 + \lambda_2(e_1 + e_2) + \lambda_3(e_1 + e_2 - e_3) = 0$$

$$\Leftrightarrow (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) e_1 + (\lambda_2 + \lambda_3) e_2 - \lambda_3 e_3 = 0$$

$\uparrow \quad \quad \uparrow \quad \quad \uparrow$ sono LIN. INDIP. perché
formano una
base

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ -\lambda_3 = 0 \Rightarrow \lambda_3 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \lambda_2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0$$

Dunque v_1, v_2, v_3 sono LIN. INDIP.

Ma più di tre el. li. indip. in $\mathbb{R}^3$ non ci possono essere SPIEGARE. Dunque v_1, v_2, v_3 è form. di vett. LIN. INDIP. inassimale (= "non posso allungarla").

Quindi è sistema di gen. di $\mathbb{R}^3$. Dunque è base
~ o ~

Stesse domande per $B' = \{u_1, u_2, u_3\}$, dove

$$u_1 = e_1 + e_2 \quad u_2 = e_1 + 2e_2 + e_3 \quad u_3 = 2e_1 + 3e_2 + e_3$$

I vettori " u_j " sono più complicati dei " v_i " di prima

conviene usare il metodo più diretto possibile: 4/10/16 (6)
 verificare se u_1, u_2, u_3 sono L.W. INDIP. o non.

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 = 0_{\mathbb{R}^3}$$

$$\lambda_1(e_1 + e_2) + \lambda_2(e_1 + 2e_2 + e_3) + \lambda_3(2e_1 + 3e_2 + e_3) = 0$$

$$(\lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3)e_1 + (\lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3)e_2 + (\lambda_2 + \lambda_3)e_3 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \cancel{\lambda_2 + \lambda_3 = 0} \end{cases} \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{cases} \begin{pmatrix} -\lambda_3, -\lambda_3, \lambda_3 \end{pmatrix}$$

(1, 1, -1) è OK

B' non è base

B' non è nemmeno un sistema di generatori. (EKE)

$$\overline{u_2 - u_1 = e_2 + e_3} \quad \dim(\text{Span}(B')) \leq 2$$

non può essere 3.

$$u_3 - 2u_1 = e_2 + e_3 \quad \text{mentre d'altro.$$

$$u_1 = e_1 + e_2, \quad u_2 - u_1 = e_2 + e_3 \in \text{Span}(B').$$

Se sono linearmente indipendenti ho trovato una base di $\text{Span}(B')$.

$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 (u_2 - u_1) = 0 \quad \alpha_1(e_1 + e_2) + \alpha_2(e_2 + e_3) = 0$$

$$\alpha_1 e_1 + (\alpha_1 + \alpha_2)e_2 + \alpha_2 e_3 = 0 \quad \begin{matrix} \alpha_1 = 0 \\ \alpha_2 = 0 \end{matrix} \quad (\alpha_1 + \alpha_2 = 0 \text{ è OK})$$

↑ base ⇒

Quindi ho una base di $\text{Span}(B')$

OPPURE

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{Span}(u_1) = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha \\ 0 \end{pmatrix} : \alpha \in \mathbb{R} \right\} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = u_2 - u_1 \Rightarrow u_1, u_2 - u_1 \text{ L.W. INDIP}$$

V spazio vettoriale su $\mathbb{R}$

$U \subset V$ è sottospazio vettoriale se

1) $U \neq \emptyset$

2) $\forall u, u' \in U$ si ha $u + u' \in U$

3) $\forall u \in U, \forall \lambda \in \mathbb{R}$ si ha $\lambda u \in U$

Conviene essere più precisi sul punto 1).

Sia $u \in U$; di lui so solo che c'è.

Prendo $\lambda = -1$ so che $-u = (-1) \cdot u \in U$ per 3)

Allora 2) mi dice che già visto

$$u - u = (1) \cdot u + (-1) \cdot u = (1 - 1) \cdot u = 0_{\mathbb{R}} \cdot u = 0_V \in U$$

Quindi, al posto di 1) posso scrivere il più preciso

1') $0_V \in U$

m equazioni
in n incognite

PBL L'insieme delle soluzioni di un sistema lineare non-omogeneo $AX=B$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$? (era un esercizio per casa).

SL non-omogeneo $\Leftrightarrow \underline{B \neq 0_{\mathbb{R}^m}}$

Se l'insieme delle soluzioni di $AX=B$ fosse un sottosp. vett. di $\mathbb{R}^n$, allora per 1') conterrebbe $0_{\mathbb{R}^n}$.

Ciò una soluzione sarebbe $x_1=0, x_2=0, \dots, x_n=0$.

Sostituendo in $AX=B$ si ottiene $0_{\mathbb{R}^n} = B \neq 0_{\mathbb{R}^n}$.

Assurdo.

4/10/16

(8)

ESERCIZIO

Se U, W sono sottospazi vettoriali di V , allora anche $U \cap W$ è un sottospazio vettoriale di V .

Dim.

$0_V \in U, 0_V \in W$ per 1') $\Rightarrow 0_V \in U \cap W$ 1') è OK.

$u, u' \in U \cap W$ arbitrari. Allora $u, u' \in U$, da cui $\underline{u + u' \in U}$. Ma anche $u, u' \in W, \Rightarrow \underline{u + u' \in W}$.

Dunque $u + u' \in U \cap W$. e 2) è OK per $U \cap W$.

$u \in U \cap W, \lambda \in \mathbb{R}$ arbitrari.

$\Downarrow$

$u \in U \text{ e } u \in W$ allora $\lambda u \in U$ e $\lambda u \in W \Rightarrow$

$\lambda u \in U \cap W$. Dunque $U \cap W$ verifica anche 3).

OSSERVAZIONE La stessa dim. funziona per un' intersezione arbitraria di sottospazi vettoriali di V .