

Un importante, UTILISSIMO, corollario del Teorema dell Scambio è il

TEOREMA del COMPLETAMENTO AD UNA BASE

V spazio vettoriale. $v_1, \dots, v_r \in V$ linearmente indipendenti

$B = \{u_1, \dots, u_n\}$ una qualsiasi base di V ($\Rightarrow \dim(V) = n$).

Allora esistono $n-r$ elementi di B , siano $u_{r+1}, \dots, u_n$

talché $\{v_1, \dots, v_r, u_{r+1}, \dots, u_n\}$ è base per V

Dim. Lo abbiamo già dimostrato! Basta prendere $G=B$ nel Teorema dell scambio. SPIEGARE BENE!

PROPOSIZIONE V spazio vettoriale.

$W \subset V$ sia sottospazio vettoriale di V . Allora

1) $\dim(W) \leq \dim(V)$.

2) Se $\dim(W) = \dim(V)$ allora $W = V$

Dim.

$w_1, \dots, w_r$ base di W ; $w_1, \dots, w_r$ son L.I. INDIP.

Per il teorema precedente esistono $v_{r+1}, \dots, v_n \in V$ t.c.

$w_1, \dots, w_r, v_{r+1}, \dots, v_n$ è base di V . Allora

$$\dim(W) = r \leq n = \dim(V).$$

Per provare 2): se $\dim(W) = \dim(V)$, allora $\{w_1, \dots, w_r\}$ è un insieme di vettori L.I. INDIP. di V , massimale.

Allora è un sistema di generatori di V . Cioè:

$$\forall v \in V \quad v = \alpha_1 \underbrace{w_1}_{\in W} + \dots + \alpha_r \underbrace{w_r}_{\in W} \in W$$

per $\alpha_1, \dots, \alpha_r \in \mathbb{R}$ opportuni

Dunque $\forall v \in V \quad v \in W$, cioè $V \subset W$
Ma $W \subset V \quad \Rightarrow W = V$

$$U = \text{Span} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$$

$$W = \text{Span} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

 $U \cap W = ?$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \in U \cap W \Leftrightarrow x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = x_4 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_5 \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ x_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3x_2 \\ 2x_2 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_3 \\ x_3 \\ x_3 \\ 2x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -x_4 \\ -x_4 \\ -x_4 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2x_5 \\ -2x_5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 - 2x_5 = 0 \\ 2x_2 + x_3 - x_4 - 2x_5 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{x_3 = 0}$$

$$\begin{array}{c} x_2 \quad x_4 \\ \left| \begin{array}{cccc} 1 & 3 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & -1 & -2 \\ \boxed{1} & 1 & -1 & 0 \end{array} \right| \rightsquigarrow \left| \begin{array}{cccc} 1 & 3 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & \boxed{-2} & 0 & 2 \end{array} \right| \rightsquigarrow$$

$$\rightarrow \left| \begin{array}{cccc} 1 & 3 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & \boxed{-1} & 0 \end{array} \right| \rightsquigarrow \left| \begin{array}{cccc} 1 & 3 & \boxed{1} & -2 \\ 0 & 2 & \boxed{-1} & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right| \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow \left| \begin{array}{cccc} 1 & 3 & 0 & -2 \\ 0 & \boxed{2} & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right| \rightsquigarrow \left| \begin{array}{cccc} 1 & \boxed{3} & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right| \rightsquigarrow \left| \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & +1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right|$$

↑↑↑
mancanti: 3 PIVOTS

5/10/16

(3)

$$\begin{cases} x_1 = \text{qualsiasi} - x_5 \\ x_2 = x_5 \\ x_4 = 0 \end{cases}$$

x_5 può assumere qualsiasi valore in $\mathbb{R}$
parametro libero

$$U \cap W = \left\{ 0 \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix} + x_5 \begin{vmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} : x_5 \in \mathbb{R} \right\} = \text{Span} \left(\begin{vmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \right)$$

SOMMA DI SOTTOSPAZI VETTORIALI

V spazio vettoriale; U, W suoi sottospazi.

$$U + W \stackrel{\text{def}}{=} \{ u + w \mid \forall u \in U, \forall w \in W \} \quad \text{SPIEGARE}$$

è sol

NOTAZIONE (= un modo di scrivere)

ESEMPIO Proviamo a vedere che cosa "viene" $U + W$ se U, W sono i due sottospazi di $\mathbb{R}^4$ dell'esercizio precedente. Limitiamo un po':

$$W = \text{Span} \left(\begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \right) = \text{Span} \left(\begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \right) \quad \begin{matrix} \in U & \in U \\ \begin{vmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \end{matrix}$$

$$U = \text{Span} \left(\begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \right) = \text{Span} \left(\begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \right)$$

$$\text{Generico elemento di } U : u = a \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix} + b \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+c \\ c \\ a+b \\ 2b \end{vmatrix}$$

$$\text{Generico elemento di } W : w = d \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix} + e \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e \\ e \\ d \\ 0 \end{vmatrix}$$

5/10/16

(4)

Allora

$$u+w = \begin{pmatrix} a+ce \\ ce \\ a+b+d \\ 2b \end{pmatrix}$$

non dice molto....

Convergenza (brutto senso....)

si può anche pensare così:

$$u+w = a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + (c+e) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{dove } a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$$

(1) sono arbitrari.

Dunque

$$U+W = \text{Span} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

quindi $U+W$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ ES Verificare che $e_1, e_2, e_3, e_4 \in U+W$. Dunque $U+W = \mathbb{R}^4$.OSSERVAZIONE Se $u+w \in U+W$, in generale gli elementi $u \in U$ e $w \in W$ non sono univocamente determinati.

Per esempio, in (1)

$$v = a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{elemento di } U+W. \text{ Suppongo } c \neq 0.$$

Allora

SPIEGARE

$$w = \underbrace{a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}}_{u_1} + \underbrace{c \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{w_1} = \underbrace{a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}}_{u_2} + \underbrace{c \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{w_2}$$

$$u_1 \neq u_2 \quad \text{e} \quad w_1 \neq w_2.$$

PROPOSIZIONESe U, W sono sottospazi di V , allora $U+W$ è ancora un sottospazio di V .

Dim.

$$0_V \in U \text{ e } 0_V \in W \Rightarrow 0_V = 0_V + 0_V \in U+W$$

5/10/16

(5)

$$u+w, u'+w' \in U+W \quad \text{arbitrari}$$

$$(u+w) + (u'+w') = \underbrace{(u+u')}_{\in U} + \underbrace{(w+w')}_{\in W} \in U+W$$

$$u+w \in U+W \quad \lambda \in \mathbb{R} \text{ arbitrari} \quad \lambda(u+w) = \underbrace{\lambda u}_{\in U} + \underbrace{\lambda w}_{\in W} \in U+W$$

In generale $\underbrace{U \cup W}_{\text{non \u00e9 sottospazio vettoriale di } V} \subsetneq U+W$

$U+W$ \u00e9 il pi\u00f9 piccolo (risp. " $\subseteq$ ") sottospazio vettoriale di V che contiene sia U che W (cio\u00e8 che contiene $U \cup W$).

$$u = u + 0_V \in U+W \quad \forall u \in U \Rightarrow U \subset U+W$$

$$\text{analogamente } W \subset U+W$$

Abbiamo visto sopra che $U+W$ \u00e9 sottospazio vett. di V .

Sia $T \subset V$ un sottospazio vettoriale λ -c. $U \subset T$ e $W \subset T$.

Allora $\forall u \in U$ e $\forall w \in W$ si ha che $u, w \in T$, dunque $u+w \in T$. Pertanto $U+W \subset T$.

In quest senso $U+W$ \u00e9 "il pi\u00f9 piccolo": ogni sottospazio vettoriale di V che contiene sia U , che W , contiene necessariamente $U+W$.

non

MATRICE TRASPOSTA

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 9 \end{pmatrix} \quad \text{m. } 2 \times 3$$

Considera la matrice ottenuta da A "scambiando le righe con le colonne"

$${}^t A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \\ 4 & 9 \end{pmatrix} \quad \text{m. } 3 \times 2$$

(la seconda colonna ...)

la prima colonna coincide con la 1^a riga di A .

5/10/16

(6)

tA si legge "A trasposta" tA è la matrice trasposta di A.

A, B matrici $m \times n$ ^{arbitrarie} $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$ $B = (b_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$

$$A + B \stackrel{\text{def}}{=} (a_{ij} + b_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$$

è ancora una matrice $m \times n$

ESEMPIO

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 9 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A + B = \begin{pmatrix} 0+1 & 1+1 & 4+2 \\ 2+2 & 3+0 & 9+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 4 & 3 & 10 \end{pmatrix}$$

A matrice $m \times n$, $\lambda \in \mathbb{R}$ arbitrari

$$\lambda A \stackrel{\text{def}}{=} (\lambda a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} \quad \text{è matrice } m \times n$$

$M(m \times n)$ è l'insieme di tutte le matrici $m \times n$ ad entrate in $\mathbb{R}$

è uno spazio vettoriale rispetto alle operazioni def. sopra. Una base di $M(m \times n)$ è (è la "base canonica")

fissati comunque gli interi i, j con $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$

E_{ij} ← matrice $m \times n$ con entrate $(i, j) = 1$, e tutte le altre entrate nulle.

ESEMPIO $m=2$ $n=3$

$$E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad E_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \dim(M(2 \times 3)) =$$

$$E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad E_{23} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad = 2 \cdot 3 = 6$$

$$\dim(M(m \times n)) = \underline{\underline{mn}}$$

$$A, B \in M(m \times n)$$

$$\lambda \in \mathbb{R}$$

$${}^t(A+B) = {}^tA + {}^tB$$

$${}^t(\lambda A) = \lambda \cdot {}^tA$$

$${}^t({}^tA) = A$$

ESEMPIO

Abbiamo visto le matrici simmetriche 2×2 .

è quelle 3×3 ?

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix}$$

$$\text{cioè } \overbrace{a_{12} = a_{21}} = b \quad \overbrace{a_{13} = a_{31}} = c \quad \overbrace{a_{23} = a_{32}} = e$$

$$(a_{11} = a_{11} \text{ è una banalità})$$

cioè: è ovviamente soddisfatta.

Un modo "rapido" per esprimere che A è simmetrica

$$\text{è } (*) \underbrace{a_{ij} = a_{ji}} \text{ per ogni } i, j \quad 1 \leq i, j \leq 3$$

In realtà, questa condizione si può dare per matrici qualsiasi, cioè di tipo $n \times n$, con n qualsiasi.

Un modo ancor più bello di dire che A è simmetrica è

$$\boxed{A = {}^tA}$$

condizione che si verifica subito nell'esempio qui sopra.

$$A = (a_{ij})$$

$${}^tA = (\alpha_{ij})$$

REGA

COLONNA

la j -esima colonna di tA coincide con la j -esima riga di A . E cioè

$$\alpha_{ij} = a_{ji} \quad \text{in generale (cioè: per la def. di } {}^tA)$$

$$\alpha_{ij} = a_{ij} \quad \forall i, \forall j \quad \text{è, invece, la condizione "A = {}^tA"}$$

Mettendoli insieme: $a_{ji} = \alpha_{ij} = a_{ij}$, è la (*).

M matrice $n \times n$ qualsiasi. $M \mapsto M + {}^tM$

ESEMPIO

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 2 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

$${}^t M = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

5/10/16

(8)

$$M + {}^t M = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \\ 4 & 7 & 12 \end{pmatrix}$$

è simmetrica.

Vali in generale?

$${}^t(M + {}^t M) = {}^t M + {}^t({}^t M) = {}^t M + M = M + {}^t M \quad \underline{\text{SI}} \quad \text{SPERG.}$$

Le matrici simmetriche $n \times n$ formano un sottospazio vettoriale di $M(n \times n)$: $\mathcal{S}(n)$

EXE $\dim(\mathcal{S}(n)) = ?$

~ ~ ~

$A \in M(n \times n)$ è antisimmetrica se $\underline{a_{ij} = -a_{ji}}$ (~~AA~~)
per ogni i, j interi con $1 \leq i, j \leq n$.

ESEMPIO

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ -3 & 0 & 1 \\ -4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$${}^t A = \begin{pmatrix} 0 & -3 & -4 \\ 3 & 0 & 1 \\ 4 & -1 & 0 \end{pmatrix} = -A$$

$$\boxed{{}^t A = -A}$$

$\Updownarrow$ in generale
(i.e. $\forall n$)

Le matrici antisimmetriche $n \times n$ formano un sottospazio vettoriale di $M(n \times n)$: $\mathcal{A}(n)$

EXE $\dim(\mathcal{A}(n)) = ?$

L'intersezione di due sottospazi vettoriali è sempre un sottospazio vettoriale. Quindi sicuramente

$$0 \in \mathcal{S}(n) \cap \mathcal{A}(n)$$

è matrice $n \times n$ nulla (tutte le entrate sono $= 0_{\mathbb{R}}$)

Come è fatta una matrice che è simultaneamente simmetrica e antisimmetrica?