

LEZIONE 11

6/10/16

1

$M(n \times n)$: spazio vettoriale delle matrici $n \times n$ dunque quadrate
ha dimensione n^2 .

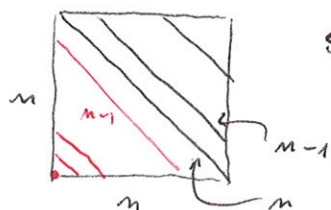
$M \in M(n \times n)$ è detta m. simmetrica se $m_{ij} = m_{ji} \quad \forall i, j$
 $(m_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} \iff \boxed{{}^t M = M} \quad (\text{SPIEG. } {}^t M)$

La matrice nulla è chiaramente simmetrica

$$\textcircled{1} \quad {}^t(M_1 + M_2) = {}^t M_1 + {}^t M_2 \quad {}^t(\lambda M) = \lambda {}^t M \quad M, M_1, M_2 \in M(n \times n) \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

EXE $\mathcal{S}(n) \stackrel{\text{def}}{=} \{M \in M(n \times n) \mid M \text{ è simmetrica}\}$

è sottospazio vettoriale di $M(n \times n)$ $\dim(\mathcal{S}(n)) = ?$



SPIEGARE

$$\dim(\mathcal{S}(n)) = n + (n-1) + \dots + 2 + 1 = \frac{(n+1)n}{2}$$

M è detta matrice antisimmetrica se $m_{ij} = -m_{ji} \quad \forall i, j$
 $\iff \boxed{{}^t M = -M}$

EXE $\mathcal{Q}(n) \stackrel{\text{def}}{=} \{M \in M(n \times n) \mid M \text{ è antisimmetrica}\}$ è sottospazio vettoriale di $M(n \times n)$. $\dim(\mathcal{Q}(n)) = (n-1+1) \frac{n-1}{2} = \frac{(n-1)n}{2}$

$$\dim(\mathcal{S}(n)) + \dim(\mathcal{Q}(n)) = n^2 = \dim(M(n \times n))$$

$\mathcal{S}(n) \cap \mathcal{Q}(n)$ è un sottospazio vettoriale di $M(n \times n)$.

$$M \in \mathcal{S}(n) \cap \mathcal{Q}(n) \implies M = {}^t M = -M \implies 2M = 0 \implies M = 0$$

$\uparrow \qquad \qquad \uparrow$
 $(M \in \mathcal{S}(n)) \quad (M \in \mathcal{Q}(n))$

$$\boxed{\mathcal{S}(n) \cap \mathcal{Q}(n) = \{0\}}$$

sottospazio formato dalla sola matrice nulla.

$M \in M(n \times n)$ qualsiasi $M + {}^t M \in S(n)$ già visto

$M - {}^t M \in M(n \times n)$ è antisimmetrica. Infatti:

$${}^t(M - {}^t M) \stackrel{①}{=} {}^t M - {}^t({}^t M) = {}^t M - M = -(M - {}^t M)$$

$$(M + {}^t M) + (M - {}^t M) = 2M \Rightarrow M = \underbrace{\frac{1}{2}(M + {}^t M)}_{\in S(n)} + \underbrace{\frac{1}{2}(M - {}^t M)}_{\in Q(n)}$$

$$③ \quad \boxed{M(n \times n) = S(n) + Q(n)}$$

$$\in S(n) + Q(n)$$

$U, W \subset V$ sottospazi vettoriali tali che $U \cap W = \{0\}$ ④

Allora ogni elemento di $U+W$ si può scrivere in modo unico nella forma $u+w$ dove $u \in U, w \in W$.

Questo è falso se non vale la ④ (visti ieri in un esempio)

Se $u+w = u'+w'$ (dove $u' \in U, w' \in W$), allora

$$U \ni u - u' = w' - w \in W. \quad \text{Dunque}$$

$$u - u' \in U \cap W = \{0\} \quad u - u' = 0_V \Rightarrow u = u' + 0_V = u' \quad \underline{\underline{u = u'}}$$

Analogamente si verifica che $w = w'$.

In tal caso la somma $U+W$ si dice diretta e si scrive $\underline{U \oplus W}$.

L'esempio trattato sopra ci dice che

$$M(n \times n) = S(n) \oplus Q(n)$$

no

$\dim(U+W) = ?$ È data dalla formula di Grassmann:

$$⑤ \quad \boxed{\dim(U+W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W)}$$

Dim.

Dobbiamo trovare una base di $U+W$, e contare gli elementi.

Sia $w_1, \dots, w_r$ una base di $U \cap W$ fissata.

Per il teorema di completezza ad una base la possiamo completare ad

- una base di U : $w_1, \dots, w_r, u_{r+1}, \dots, u_s$ $\dim(U) = s$

- una base di W : $w_1, \dots, w_r, w_{r+1}, \dots, w_t$ $\dim(W) = t$

Ogni elemento di $U+W$ si scrive nella forma $u+w$ con $u \in U$ e $w \in W$. Dunque: ogni el. t di $U+W$ è combinazione lineare di:

NB non serve "ripetere" $w_1, \dots, w_r$.

$$\underbrace{w_1, \dots, w_r, u_{r+1}, \dots, u_s}_{\dim(U)}, \underbrace{w_{r+1}, \dots, w_t}_{\dim(W) - \dim(U \cap W)}$$

quindi questi vettori formano un sistema di generatori per $U+W$. Se provi che sono L.I.W. INDIP. ho provato la formula di Grassmann. Sia

IMPONGO 10

$$\alpha_1 w_1 + \dots + \alpha_r w_r + \beta_{r+1} u_{r+1} + \dots + \beta_s u_s + \gamma_{r+1} w_{r+1} + \dots + \gamma_t w_t = 0_V \quad (6)$$

Allora

$$\underbrace{\alpha_1 w_1 + \dots + \beta_s u_s}_{\in U} = - \underbrace{\gamma_{r+1} w_{r+1} + \dots + \gamma_t w_t}_{\in W} \quad \text{quindi}$$

$$\alpha_1 w_1 + \dots + \alpha_r w_r + \beta_{r+1} u_{r+1} + \dots + \beta_s u_s \in U \cap W$$

$\uparrow \quad \uparrow \quad \dots \quad \uparrow$
i base di $U \cap W$

$$\Rightarrow \boxed{\beta_{r+1} = \dots = \beta_s = 0}$$

Allora la (6) diventa

$$\alpha_1 w_1 + \dots + \alpha_r w_r + \gamma_{r+1} w_{r+1} + \dots + \gamma_t w_t = 0$$

$\uparrow \quad \uparrow \quad \dots \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \dots \quad \uparrow$

sono una base di W , dunque sono L.I.W. INDIP.

Bertando $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = \gamma_{n+1} = \dots = \gamma_t = 0$.

ESERCIZIO (compit del 14/9/16) $V = \mathbb{R}^3$

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$U = \text{span}(v_1, v_2, v_3)$$

(a) si calcoli $\dim(U)$ e si trovi una base B di U

(b) si trovi una base $\mathcal{C}$ di $\mathbb{R}^3$ tale che $B \subset \mathcal{C}$.

(NON SO quale dei due è vero)

v_1, v_2, v_3 sono L.I.V. INDIP., o non lo sono. $\downarrow$ che decido B

Nel primo caso formano già una base di U . In tal caso $\dim(U) = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$, $U \subset \mathbb{R}^3 \Rightarrow U = \mathbb{R}^3$ e posso prendere

$$\mathcal{C} = \{v_1, v_2, v_3\} = B.$$

Nel secondo caso provo a sfruttare l'unico zero che compare tra le componenti (rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$) di v_1, v_2, v_3 . Osservo che v_2 e v_3 non sono propriamente l'una l'altro (cioè $v_2 \notin \text{span}(v_3)$ e analogo). Dunque v_2, v_3 sono L.I.V. INDIP. In tal caso si deve avere

$$v_1 = \lambda v_2 + \mu v_3 \Rightarrow \lambda = 2 \quad (\text{non può essere altro}).$$

$$v_1 - 2v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -v_3 \Rightarrow \boxed{v_1 = 2v_2 - v_3}$$

Quindi è vero questo secondo caso.

$$B = \{v_2, v_3\} \quad \mathcal{C} = \{v_2, v_3, e_3\}$$

$$v_3 + e_3 = e_1$$

$$v_2 - e_3 - (v_3 + e_3) = e_2$$

Oppure: verifico direttamente se v_1, v_2, v_3 sono L.I.V. INDIP. o meno

$$xv_1 + yv_2 + zv_3 = 0_{\mathbb{R}^3} \quad (x, y, z \in \mathbb{R}) \quad \text{expand}$$

$$x \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{vmatrix} + y \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix} + z \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \iff \begin{cases} x+y+z=0 \\ 2x+y=0 \\ 3x+y-z=0 \end{cases} \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} \rightsquigarrow$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} \rightsquigarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -4 \end{vmatrix} \rightsquigarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \rightsquigarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad \begin{cases} x=z \\ y=-2z \end{cases}$$

Però $z=1 \Rightarrow x=1 \quad y=-2 \Rightarrow v_1 - 2v_2 + v_3 = 0$ cioè

$$v_1 = 2v_2 - v_3$$

Dunque v_1, v_2, v_3 sono L.W. DIPENDENTI

Due qualsiasi tra v_1, v_2, v_3 non sono proporzionali tra loro, dunque sono linearmente indipendenti. Quindi si può prendere, per esempio, $B = \{v_1, v_3\} \Rightarrow \dim(U) = 2$.

Il quesito b) significa "completa la base B ad una base di $\mathbb{R}^3$ ". (che chiamo $\mathcal{B}$). Insomma $\mathcal{B} = \{v_1, v_3, e_3\}$.

ESERCIZIO Si verifichi che $U = \{(x, y, z, t) \mid y+z-t=0\}$

e $W = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x-y=0 \text{ e } z-2t=0\}$ sono sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^4$. Si trovino basi per $U, W, U \cap W$ e $U+W$.

U è l'insieme di tutte le soluzioni del sistema lineare omogeneo

$$y+z-t=0 \quad (\text{una sola equazione})$$

Analogamente, W è l'insieme di tutte le soluzioni di

$$\begin{cases} x-y=0 \\ z-2t=0 \end{cases} \quad \text{S.L. Omogeneo.}$$

Dunque abbiamo visto già che U, W sono sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^4$.

Per cercare basi conviene applicare in quest caso particolare il procedimento usato per dimostrare la formula di Grassmann.

Iniziamo a cercare una base di $U \cap W$. Quest sottospazio vettoriale è l'insieme di tutte le soluzioni del sistema lineare omogeneo

$$\begin{cases} y+z-t=0 \\ x-y=0 \\ z-2t=0 \end{cases}$$

La sua soluzione generale è

$$(x, y, z, t) = (-t, -t, 2t, t) = t(-1, -1, 2, 1) \text{ cioè}$$

$$U \cap W = \text{span} \left(\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$w_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

è base di $U \cap W$ ($r=1$)

$$\underline{\dim(U \cap W) = 1}$$

Vogliamo prolungare w_1 ad una base di U .

La soluzione generale di $y+z-t=0$ è

$$(x, y, z, t) = (x, y, z, y+z) \text{ che interpreto come}$$

$$x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Dunque } U = \text{span} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

i tre vettori sono L.W. W.D.P.
è una base di U .

Ma tra gli el. t. di tale base non compare w_1 . Ora

$w_1 \in U \cap W \subset U$ allora esistono $x, y, z \in \mathbb{R}$ tali che

$$x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

necessariamente (SPIEGARE!):

$$x=1 \quad y=1 \quad z=-2 \quad \text{verificare che funzionano}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

dunque

6/10/16

(7)

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{è base di } U \quad \underline{\dim(U) = 3}$$

Definire perciò analoghe considerazioni per W

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ z - 2t = 0 \end{cases} \quad \text{sol. generale } (x, y, z, t) = (x, x, 2t, t) \Rightarrow$$

$$x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$W = \text{Span} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \quad \underline{\dim(W) = 2}$$

↑ ↑ lin. indep. ↗

Allora

$$\dim(U+W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W) = 3 + 2 - 1 \neq 4$$

$$U+W \subset \mathbb{R}^4 \quad \dim(U+W) = 4 \quad \Rightarrow \quad \underline{U+W = \mathbb{R}^4}$$

EXE Prolungate u_i (base di $U \cap W$) ad una base di W .