ESERCIZI VARI su SPAZI VETTORIALI

Si giustifichi la risposta ad ogni esercizio (o parte di esercizio) posto in forma di domanda.

Esercizio 1. Dimostrare che i vettori

$$\begin{vmatrix} 1 \\ 3 \end{vmatrix} \quad , \quad \begin{vmatrix} -2 \\ 5 \end{vmatrix}$$

in $\mathbb{R}^2$ sono linearmente indipendenti, e che ogni vettore di $\mathbb{R}^2$ è una combinazione lineare di questi due vettori.

Esercizio 2. Dire se i seguenti vettori di $\mathbb{R}^3$ sono o meno linearmente indipendenti

$$v_1 = \begin{vmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix} \quad , \quad v_2 = \begin{vmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{vmatrix} \quad , \quad v_3 = \begin{vmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{vmatrix}$$

Lo stesso per la terna

$$w_1 = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{vmatrix} \quad , \quad w_2 = \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{vmatrix} \quad , \quad w_3 = \begin{vmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{vmatrix}$$

Esercizio 3. Considerate le terne di vettori di $\mathbb{R}^3$:

$$\text{a)} \quad \begin{vmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{vmatrix} \quad , \quad \begin{vmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix} \quad , \quad \begin{vmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{vmatrix}$$

$$\text{b)} \quad \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{vmatrix} \quad , \quad \begin{vmatrix} 5 \\ 1 \\ 7 \end{vmatrix} \quad , \quad \begin{vmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{vmatrix}$$

$$\text{c)} \quad \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{vmatrix} \quad , \quad \begin{vmatrix} 5 \\ 7 \\ 1 \end{vmatrix} \quad , \quad \begin{vmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{vmatrix}$$

$$\text{d)}\qquad \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{vmatrix} \quad , \quad \begin{vmatrix} 0 \\ 5 \\ 1 \end{vmatrix} \quad , \quad \begin{vmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \end{vmatrix}$$

Per ciascuna di esse dire se costituisce o meno una base di $\mathbb{R}^3$. In caso affermativo rappresentare il vettore

$$\begin{vmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{vmatrix}$$

come combinazione lineare degli elementi della base data. Altrimenti trovare un vettore che non sia combinazione lineare dei vettori della terna assegnata.

Esercizio 4. Sia V uno spazio vettoriale sul campo $\mathbb{R}$, e siano v_1 , v_2 due vettori linearmente indipendenti di V, Si verifichi che $v_1 + v_2 , v_1 - v_2$ sono ancora linearmente indipendenti.

Esercizio 5. Siano v_1 , v_2 , v_3 vettori linearmente indipendenti di uno spazio vettoriale V. Si verifichi che allora sono linearmente indipendenti anche i vettori $v_1 + v_2 , v_2 + v_3 , v_3 + v_1$. Che cosa si può dire della terna $v_1 + v_2 + v_3 , v_1 - v_3 + v_2 , v_1 + v_3 - v_2$?

Esercizio 6. Trovare basi per la somma e l'intersezione dei due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^4$

$$U = Span\left(\begin{vmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix} , \begin{vmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix} , \begin{vmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ -2 \end{vmatrix} \right)$$

$$W = Span\left(\begin{vmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \\ 3 \end{vmatrix} , \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ -6 \end{vmatrix} , \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \\ 5 \end{vmatrix} \right)$$

Esercizio 7. Dati tre vettori v_1 , v_2 , v_3 di uno spazio vettoriale V, si dimostri che se $\langle v_1 , v_2 \rangle = \langle v_1 , v_3 \rangle$, allora v_1 , v_2 , v_3 sono linearmente dipendenti. Vale anche l'implicazione opposta?

Esercizio 8. Siano u, v, w tre vettori linearmente indipendenti di uno spazio vettoriale V .

- Provare che $u + v$, $v - w$, $u + 2w$ sono linearmente indipendenti.
- Posto $U := Span(u + v\, ,\, v - w)$ e $W := Span(u + 2w\, ,\, v - w)$, calcolare le dimensioni di U , W , $U \cap W$, $U + W$.

Esercizio 9. Sono assegnati in $\mathbb{R}^4$ i vettori

$$u = \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix} \qquad \text{e} \qquad v = \begin{vmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{vmatrix}$$

Determinare due basi $\mathscr{A}$ e $\mathscr{B}$ di $\mathbb{R}^4$ ciascuna delle quali contenga entrambi tali vettori. Si calcolino poi le coordinate di $w = (1, 2, 2, 1)$ sia rispetto ad $\mathscr{A}$ che a $\mathscr{B}$.

Esercizio 10. Dati i vettori di $\mathbb{R}^4$

$$u = \begin{vmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \\ 4 \end{vmatrix} \quad , \quad v = \begin{vmatrix} -1 \\ -1 \\ 5 \\ 9 \end{vmatrix} \quad , \quad w = \begin{vmatrix} 2 \\ 0 \\ -13 \\ 23 \end{vmatrix} \quad , \quad t = \begin{vmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \\ -2 \end{vmatrix}$$

trovare la dimensione ed una base del sottospazio di $\mathbb{R}^4$ da essi generato.

Esercizio 11. Verificare che la seguente famiglia di vettori in $\mathbb{R}^4$ non è libera, cioè i vettori che la formano non sono linearmente indipendenti tra loro

$$u = \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix} \quad , \quad v = \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix} \quad , \quad w = \begin{vmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{vmatrix} \quad , \quad t = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{vmatrix}$$

Estrarne una sottofamiglia libera $\mathcal{L}$ con massimo numero di vettori e completare $\mathcal{L}$ in una base, utilizzando vettori della base canonica.

Esercizio 12. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^5$ sono dati i vettori

$$u = \begin{vmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \quad , \quad v = \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \quad , \quad w = \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{vmatrix}$$

Provare che sono linearmente indipendenti e costruire una base di $\mathbb{R}^5$ che li contenga.

Esercizio 13. Per quali valori di $t \in \mathbb{R}$ i tre vettori

$$\begin{vmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{vmatrix} \quad , \quad \begin{vmatrix} 3 \\ t \\ 11 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} -1 \\ 4 \\ 0 \end{vmatrix}$$

sono linearmente dipendenti ?

Esercizio 14. Sia $\mathbb{R}$ considerato come spazio vettoriale su se stesso. Verificare che i suoi unici sottospazi sono $\{0\}$ ed $\mathbb{R}$.

Esercizio 15. Siano U, W sottospazi di uno spazio vettoriale V. Dimostrare che $U \cup W$ è un sottospazio di V se e solo se $U \subseteq W$ oppure $W \subseteq U$. Se quest' ultima condizione non è verificata, sussiste comunque qualche proprietà di sottospazio per l' insieme $U \cup W$?

Esercizio 16. Sia $\mathbb{R}[X]$ l' insieme dei polinomi a coefficienti reali, nell' indeterminata X . Ricordiamo che i polinomi

$$a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \ldots + a_n X^n \qquad\qquad b_0 + b_1 X + b_2 X^2 + \ldots + b_m X^m$$

sono uguali, *per definizione*, se $n = m$ e $a_i = b_i$ per ogni $i = 0, 1, \ldots, n$.

- Verifica che $\mathbb{R}[X]$ è uno spazio vettoriale sul campo dei numeri reali, e che il sottoinsieme $\mathbb{R}[X]_2$ dei polinomi di grado ≤ 2 è un sottospazio.
- Prova che i polinomi 1 , $X - 1$, $(X - 1)^2$ costituiscono una base di $\mathbb{R}[X]_2$. Determina le coordinate di $p(X) = 6 - 5X + 2X^2$ rispetto a tale base.

- Se $p(X) \in \mathbb{R}[X]_2$, indicheremo con $p'(X)$ la derivata prima di $p(X)$. Verificare che entrambi i sottoinsiemi di $\mathbb{R}[X]_2$

$$U := \{\, p(X) \,|\, p'(0) = 0 \,\} \qquad W := \{\, p(X) \,|\, p'(1) = 0 \,\}$$

sono sottospazi. Dare una base di U, W, $U + W$, $U \cap W$.

Esercizio 17. I tre polinomi

$$1 + X + X^2 \ , \ 2X + X^3 \ , \ 2 + 2X^2 - X^3$$

sono linearmente dipendenti o indipendenti in $\mathbb{R}[X]$?

Esercizio 18. Si descriva il sottospazio W di $\mathbb{R}[X]$ generato dai polinomi

$$1 \ , \ 2X^4 \ , \ 3 \ , \ 2X \ , \ X^3 \ , \ X$$

Il polinomio $\frac{3}{2} + X^2 - X^4$ appartiene a W? Il sottospazio generato da

$$1 \ , \ \sqrt{2} \ , \ X \ , \ 2X \ , \ 2X^3 \ , \ \frac{3}{28}X^4$$

coincide con W?

Esercizio 19. Sia E lo spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ dei polinomi nell' indeterminata X, a coefficienti reali, di grado ≤ 3, Dimostra che i seguenti polinomi formano una base di E

$$1 \ , \ X - 5 \ , \ (X - 5)^2 \ , \ (X - 5)^3$$

Esercizio 20. Siano V un spazio vettoriale di dimensione finita, ed U un suo sottospazio. Provare che esiste un sottospazio W di V tale che

$$U + W = V \qquad \text{e} \qquad U \cap W = \{0\}$$

Esprimeremo il fatto che le due condizioni qui sopra siano simultaneamente valide dicendo che V è la *somma diretta* di U e W, e scrivendo $V = U \oplus W$. Diremo anche che W è un *sottospazio supplementare* di U (e, simmetricamente, che U è un sottospazio supplementare di W). Trovare un esempio che mostri che W non è univocamente determinato da U.

Esercizio 21. Sia V uno spazio vettoriale, e siano U e W due suoi sottospazi tali che $V = U \oplus W$.
Provare che se $\{ u_1 , u_2 , \ldots , u_h \}$ è una base di U e $\{ w_1 , w_2 , \ldots , w_k \}$ è una base di W , allora $\{ u_1 , \ldots , u_h , w_1 , \ldots , w_k \}$ è una base di V .

Esercizio 22. Siano U e W sottospazi vettoriali di V. Provare che $V = U \oplus W$ se e solo se ogni $v \in V$ si scrive in modo unico come $v = u + w$, ove $u \in U$ e $w \in W$.

Esercizio 23. Si provi che in uno spazio vettoriale V (di dimensione finita) due sottospazi U e W della stessa dimensione possiedono un sottospazio supplementare comune. Cioè esiste un sottospazio T di V tale che $U \oplus T = V = W \oplus T$.

Esercizio 24. Sia

$$U = \{ A \in \mathscr{M}(2 \times 2) \,|\, a_{11} + a_{22} = 0 \}$$

- Verificare che U è un sottospazio di $\mathscr{M}(2 \times 2)$ e darne una base.
- Determinare un sottospazio W di $\mathscr{M}(2\times2)$ tale che $U \oplus W = \mathscr{M}(2\times2)$.

Esercizio 25. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione 10, e siano $U, W \subseteq V$ due suoi sottospazi di dimensione 8 e 9 rispettivamente. Discutere i possibili valori di $dim(U \cap W)$.

Esercizio 26. Sia U il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ generato dai vettori

$$v_1 = \begin{vmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \\ 6 \end{vmatrix} \qquad v_2 = \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \\ 3 \end{vmatrix} \qquad v_3 = \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{vmatrix} \qquad v_4 = \begin{vmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix}$$

Si estragga una base di U dal sistema di generatori dato. Usando l' algoritmo di Gauss, si trovi, poi, un' altra base di U.

Esercizio 27. Si verifichi che

$$U \,=\, \{\,(x,y,z,t)\,|\,y+z-t\,=\,0\,\} \qquad \text{e}$$

$$W \,=\, \{\,(x,y,z,t)\,|\,x-y\,=\,0 \quad , \quad z-2t\,=\,0\,\}$$

sono sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^4$. Si trovi poi la dimensione ed una base rispettivamente di U, W e $U \cap W$.

Esercizio 28. Sia X un insieme non vuoto qualsiasi, e sia V un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale. Verificare che l' insieme $Appl(X,V)$ di tutte le applicazioni $X \to V$ è uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ rispetto alle seguenti operazioni. Presi comunque $f, g \in Appl(X,V)$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ definiamo

$$(f+g)(x) \,:=\, f(x)+g(x) \qquad\qquad (\lambda\, f)(x) \,:=\, \lambda\, f(x)$$

per ogni $x \in X$. Nel caso particolare in cui $X = V = \mathbb{R}$, si verifichi che ciascuna delle seguenti famiglie è formata da vettori linearmente indipendenti di $Appl(\mathbb{R},\mathbb{R})$

$$\{\,1,x\,\} \qquad \{\,x,x^2\,\} \qquad \{\,x,\sin(x)\,\} \qquad \{\,\cos(x),\sin(x)\,\}$$

$$\{\,x,e^x\,\} \qquad \{\,1,x,x^2,x^3,\ldots,x^n,\ldots\,\}$$