

Matrice $m \times n$ il tipo: entrate, indice di riga, i. d. colonna.

Operazioni: somma tra matrici dello stesso tipo
prodotto di una matrice per uno scalare $\lambda \in \mathbb{R}$.

MOLTIPLICAZIONE "RIGHE PER COLONNE" TRA MATRICI

a) CASO BASE

$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \end{bmatrix}$ matrice $1 \times n$ m. riga

$B = \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{bmatrix}$ matrice $n \times 1$ m. colonna

$$AB = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{bmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} \underbrace{a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \dots + a_{1n}b_{n1}}_{\sum_{h=1}^n a_{1h}b_{h1}} \in \mathbb{R}$$

SPIEGARE

ESEMPIO

a_{ij} sia la quantità della materia prima y_j necessaria per produrre un'unità di un dato prodotto, P.

b_{j1} sia il prezzo unitario della materia prima y_j .

La matrice A rappresenta "tutto quel che devo usare" per produrre un'unità di P.

AB (in questo caso!) è uno scalare, cioè una matrice 1×1

AB significa "quanto costa produrre un'unità di P".
~ o ~

I prezzi cambiano col tempo.

Per esempio posso considerare una matrice B, di

tipo $n \times p$ col seguente significato

10/10/16 (2)

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{np} \end{pmatrix}$$

$\uparrow$ $\uparrow$ $\uparrow$
 prezzi nel 2002 prezzi nel 2004 prezzi nel 2016 ($p=8$)

← prezzi per la materia prima 1

← " " " " " " " " 2

← " " " " " " " " n

$B = |B_1 \ B_2 \ \dots \ B_p|$ B_h : h-esima colonna di B
 è uno dei modi di scrivere la matrice B "a blocchi"

O allora

$$AB \stackrel{\text{def}}{=} | \underbrace{AB_1}_{\mathbb{R}} \ \underbrace{AB_2}_{\mathbb{R}} \ \dots \ \underbrace{AB_p}_{\mathbb{R}} |$$

$\uparrow$ $\uparrow$ $\uparrow$
 $1 \times n$ $n \times p$ $\mathbb{R}$

è una matrice $1 \times p$

AB rappresenta come è variato nel corso degli anni il prezzo di produzione di un'unità di P.

b) IL CASO GENERALE

A, B due matrici qualsiasi, ad entrate in $\mathbb{R}$

A di tipo $n \times m$

B di tipo $n \times p$

questo è importante:

il numero delle colonne di A deve essere uguale al numero delle righe di B. In pratica:

~~Ove ritenuto opportuno, le rettilinee di consolidamento possono essere espresse individualmente già al netto degli effetti fiscali.~~

$$A = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_m \end{pmatrix}$$

A_h : la h-esima riga di A

B sia come sopra. O allora

il prodotto è sempre possibile tra matrici QUADRATE dello STESSO TIPO $n \times n$

10/10/16

(3)

$$AB \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} A_1 B_1 & A_1 B_2 & \dots & A_1 B_p \\ A_2 B_1 & A_2 B_2 & & A_2 B_p \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_m B_1 & A_m B_2 & & A_m B_p \end{pmatrix} \quad \text{è una matrice } m \times p$$

($m \times n \cdot n \times p$)

$$\text{cioè } (AB)_{ij} = A_i B_j = \begin{vmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{vmatrix} =$$

SPIEG.

$$= a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \dots + a_{in} b_{nj} = \sum_{h=1}^n a_{ih} b_{hj}$$

Sembra molto complicato, ma se ne viene fuori...

ESEMPIO

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 5 & 2 & 6 \end{pmatrix} \quad 2 \times 3$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2 \quad 2 \times 2$$

matrice identica 2×2

$A \cdot B$ non si può fare. Invece si può fare

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 5 & 2 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 3 + 0 \cdot 5 & 1 \cdot 4 + 0 \cdot 2 & 1 \cdot 1 + 0 \cdot 6 \\ 0 \cdot 3 + 1 \cdot 5 & 0 \cdot 4 + 1 \cdot 2 & 0 \cdot 1 + 1 \cdot 6 \end{pmatrix} = A$$

$2 \times 2 \quad 2 \times 3$

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A I_3 = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 5 & 2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$2 \times 3 \quad 3 \times 3$
OR

$$= \begin{pmatrix} 3 \cdot 1 + 4 \cdot 0 + 1 \cdot 0 & 3 \cdot 0 + 4 \cdot 1 + 1 \cdot 0 & 3 \cdot 0 + 4 \cdot 0 + 1 \cdot 1 \\ 5 \cdot 1 + 2 \cdot 0 + 6 \cdot 0 & 5 \cdot 0 + 2 \cdot 1 + 6 \cdot 0 & 5 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 6 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 5 & 2 & 6 \end{pmatrix} = A$$

Convincersi che se A è una qualsiasi matrice $m \times m$,

allora $\boxed{I_m A = A = A I_m}$

PROPRIETÀ del PRODOTTO RxC TRA MATRICI

- A, B matrici $m \times n$, C matrice $n \times p$. Allora

$$(A+B)C = AC + BC$$

A matrice $m \times n$, B, C matrici $n \times p$.

$$A(B+C) = AB + AC$$

} propr. distributive risp. +

- A, B, C matrici $m \times n$, $n \times p$, $p \times q$ risp. Allora

$$\boxed{A(BC) = (AB)C}$$

propr. associativa

- A, B come sopra, $\lambda \in \mathbb{R}$. Allora

$$\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$$

Non son difficili da dimostrare, ma la settimana prossima lo dimostreremo senza nessuna fatica. Aspettiamo.

Invece NON vale la proprietà commutativa

ESEMPIO

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \cdot 0 + 1 \cdot 0 & 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 \\ 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 & 0 \cdot 0 + 0 \cdot 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 & 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 \\ 0 \cdot 0 + 1 \cdot 0 & 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$$

ma anche:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 11 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 3 \\ 4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 \cdot 1 & 3 \cdot 2 \\ 4 \cdot 1 & 4 \cdot 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 4 & 8 \end{vmatrix}$$

non son nemmeno
dell' stesso tipo.

$$A \quad m \times n \quad B \quad n \times p \Rightarrow {}^t A = n \times m \quad {}^t B = p \times n$$

Quindi si può fare ${}^t B {}^t A$ che ha tipo $p \times m$

$$AB \text{ ha tipo } m \times p \Rightarrow {}^t(AB) \quad \text{ " } \quad \text{ " } \quad p \times m$$

$${}^t B {}^t A = {}^t(AB) ?$$

$$AB = (p_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq p}}$$

$$p_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj}$$

$${}^t(AB) = (q_{ji})_{\substack{1 \leq j \leq p \\ 1 \leq i \leq m}}$$

$$q_{ji} \stackrel{\text{def}}{=} p_{ij}$$

ora

$|b_{1j} \ b_{2j} \ \dots \ b_{nj}|$ è la j -esima riga di ${}^t B$

$$\begin{vmatrix} a_{i1} \\ a_{i2} \\ \vdots \\ a_{in} \end{vmatrix}$$

è l' i -esima colonna di ${}^t A$

banalmente

$$q_{ji} = |b_{1j} \ b_{2j} \ \dots \ b_{nj}|$$

$$\begin{vmatrix} a_{i1} \\ a_{i2} \\ \vdots \\ a_{in} \end{vmatrix}$$

Dunque

$$\boxed{{}^t(AB) = {}^t B {}^t A}$$

ESEMPIO

$$A \quad m. \quad m \times n$$

$$B \quad m. \quad m \times 1$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$AX = B$ è il solito sistema lineare

↗ prodotto righe per colonne, stavolta. Non è formale.

MATRICI ELEMENTARI $n \times n$ I° TIPO

$$S_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 0 & 1 \\ & & 1 & 0 \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

SPIEG.

$$= I_n + E_{ij} + E_{ji} - E_{ii} - E_{jj}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

dove non c'è scritto niente: 0

EXE
Costruire tutte le possibili S_{ij} per $n=3$
 $(S_{ij})^2 = S_{ij} S_{ij} = ?$

II° TIPO

$$M_i(c) = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & c & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

dove non c'è scritto niente

$$= I_n + (c-1) E_{ii} \quad \text{con } \boxed{c \neq 0}$$

III° TIPO

$$A_{ij}(a) = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & a \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} = I_n + a E_{ij} \quad \underline{\underline{i \neq j}}$$

ESEMPIO

$$\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + a \cdot 0 & 1 \cdot b + a \cdot 1 \\ 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 & 0 \cdot b + 1 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a+b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

FARE EXE 2,3 dall'Esercizi n.3 per DOMANI