Esercizi n.1

key words: Derivate direzionali, derivate parziali, funzioni differenziabili, differenziale, piano tangente.

1) Mostrare che le seguenti funzioni sono continue su tutto $\mathbb{R}^2$:

$$f(x,y) := \frac{\sin(xy)}{\sqrt{x^2+y^2}} \qquad g(x,y) := \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} \qquad h(x,y) := x^2 \log(x^2+y^2)$$

dove si sottointende che $f(0,0) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$. (Quindi bisogna provare che il limite esiste!)

2) Determinare i punti di continuità e di discontinuità delle seguenti funzioni:

$$f(x,y) := \sin\left(\frac{x}{y}\right) \qquad g(x,y) := \frac{x^3+y^2}{x^2+y^2}$$

$$h(x,y) := \frac{x^3+y^2}{x^3+y^3} \qquad u(x,y) := \frac{x^3+y^2}{x^2+y}$$

3) Provare che le funzioni

$$f(x,y) := \frac{x^4y^4}{(x^2+y^4)^3}, \qquad g(x,y) := \frac{x^2}{x^2+y^2-x}$$

tendono a 0 quando (x,y) tende a $(0,0)$ lungo ogni possibile linea retta passante per l'origine. Provare, tuttavia, che f e g sono discontinue nell'origine.

4) Siano $P(x,y)$ e $Q(x,y)$ due polinomi omogenei distinti di grado $n \in \mathbb{N}_+$, cioè

$$P(x,y) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_{P,i} x^i y^{n-i} \qquad \alpha_{P,i} \in \mathbb{R}$$

Dimostrare che

$$R(x,y) := \frac{P(x,y)}{Q(x,y)}$$

è una funzione discontinua nell'origine.

5) Trovare la derivata nella direzione del versore $\underline{v} = (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$, nel punto $(-1,1)$, per le funzioni

$$x^2+y^2, \qquad \sin(x(y+\pi)), \qquad \sqrt{1+xy^2}.$$

6) Trovare la derivata nella direzione del generico versore $\underline{v} = (v_1, v_2)$, nell'origine, per le funzioni

$$x + \sin y, \qquad \frac{x}{1+x^4+y^4}, \qquad (x+1)^2 + (y+1)^2 + 5.$$

7) Calcolare le derivate parziali delle funzioni

$$\frac{xy}{x+y}, \qquad (x+y^2)e^{x-y}, \qquad (\sqrt{x^2+y^2+1})\log(\frac{x-y}{x+y}).$$

8) Dimostrare che la funzione

$$f(x,y) := \sqrt[3]{xy}$$

è continua nell'origine.
Calcolare $\partial_x f$ e $\partial_y f$ nell'origine.
Dimostrare inoltre che $\partial_v f$ non esiste se $v \notin \{(1,0),(0,1)\}$.

9) Costruire almeno un esempio di funzione $f(x,y)$ per cui esista $\partial_v f$ per ogni scelta di v in S^1 senza che f risulti differenziabile nell'origine.

10) Calcolare il differenziale in $(0,0)$ per le funzioni

$$e^{\frac{1}{x^2+y^2-1}}, \qquad \sin(y+x^2), \qquad f(x,y) = \begin{cases} x^2+x+y & \text{se} \quad y \geq 0, \\ x^2+y^2+x+y & \text{se} \quad y < 0. \end{cases}$$

11) Trovare in un generico punto (x_0, y_0) l'equazione del piano tangente al grafico delle funzioni

$$f(x,y) = \sqrt{1+x^2+y^2}, \qquad f(x,y) = x^2+y^2+x+y+1, \qquad f(x,y) = \sin(x+y).$$

12) Sia $S \subset \mathbb{R}^3$ la superficie ellissoidale definita dall'equazione

$$2x^2 + (y-1)^2 + (z-10)^2 = 1$$

Sia $T \subset \mathbb{R}^3$ la superficie definita come segue

$$T := \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = \frac{1}{x^2+y^2+1} \right\}$$

Dimostrare l'esistenza di due punti p e q, $p \in S$ e $q \in T$, tali che la retta $\bar{pq}$ risulti perpendicolare ad S in p e a T in q.

13) Sia $v_0 \in R^n$ un vettore fissato. Consideriamo la funzione $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ così definita

$$f(x) = \langle x, v_0 \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i v_{0,i}$$

Calcolare ∇f, determinare le curve di livello della funzione e dare un'interpretazione geometrica del vettore gradiente.