

Anno Accademico 2016/17

Corso di Istituzioni di Analisi Superiore, modulo B

Titolare del corso: Daniele Del Santo

Programma di massima del corso

Funzioni AC e BV in una variabile

Funzioni continue non derivabili in nessun punto. Esempio di Weierstrass. Abbondanza delle funzioni continue non derivabili in nessun punto. Numero degli spigoli e delle cuspidi in una funzione continua. Teorema di Lebesgue sulla derivazione quasi ovunque delle funzioni monotone. Dimostrazione del teorema nel caso delle funzioni continue. Teorema di Fubini sulla derivazione di una serie di funzioni monotone. Le funzioni a variazione limitata: introduzione. Funzioni a variazione limitata. Generalità sulle funzioni a variazione limitata. Funzioni primitive di funzioni L^1 . La funzione coincide con la derivata della primitiva. Assoluta continuità dell'integrale. Funzioni assolutamente continue. Generalità sulle assolutamente continue. Le funzioni integrali di funzioni L^1 sono assolutamente continue. Le funzioni assolutamente continue sono funzioni integrali di funzioni L^1 . Confronto tra il teorema fondamentale del calcolo in versione Riemann e in versione Lebesgue.

Misure con segno e complesse

Misure complesse e misure con segno. Teorema di decomposizione di Hahn. Variazione totale di una misura con segno e di una misura complessa. Assoluta continuità di una misura rispetto a una misura positiva. Il teorema di Radon-Nikodym. Una osservazione sulle misure di Lebesgue -Stieltjes. Derivata simmetrica di una misura rispetto alla misura di Lebesgue. Funzione massimale di Hardy-Littlewood. Semicontinuità inferiore della funzione massimale. Lemma di Wiener. Teorema massimale. Punti di Lebesgue e teorema sui punti di Lebesgue di una funzione L^1 . Derivata simmetrica di una misura assolutamente continue rispetto a una misura di Lebesgue.

Distribuzioni

Prerequisiti per la teoria delle distribuzioni: densità di C_0 in L^1 , densità di C_0 in L^p , convoluzione, funzioni test e mollificatori, partizione dell'unità. Definizione di distribuzione. Esempi di distribuzioni: funzioni L^1_{loc} , delta di Dirac, distribuzione Valore Principale di $1/x$. Definizione alternativa di distribuzione. Delta di Dirac come limite debole di una famiglia di mollificatori. Carattere locale di una distribuzione. Supporto di una distribuzione. Derivata di una distribuzione: definizione, La derivata di una distribuzione è una distribuzione. Teorema di struttura: localmente le distribuzioni sono derivate di funzioni limitate. Moltiplicazione di una distribuzione per una funzione C^∞ . Soluzione delle equazioni $xT=0$ e $xT=1$ con T distribuzione incognita. Il teorema di Du Bois e Raymond. Distribuzioni a supporto compatto. Estensione di una distribuzione a supporto compatto a C^∞ . Topologia di Fréchet su C^∞ . Convoluzione di una distribuzione con una funzione test. Convoluzione di una distribuzione con due funzioni. Approssimazione debole di una distribuzione tramite funzioni C^∞ . Caratterizzazione

della convoluzione da un punto di vista funzionale. Convoluzione di due distribuzioni. Trasformata di Fourier di una funzione L^1 . Prime proprietà e lemma di Riemann-Lebesgue. Esempi. Trasformata di Fourier della gaussiana. Lo spazio di Schwartz. Seminorme dello spazio di Schwartz. Distribuzioni temperate. Azione della trasformata di Fourier sullo spazio di Schwartz. Teorema di inversione della trasformata di Fourier. Trasformata di Fourier di una distribuzione temperata. Esempio di calcolo di alcune trasformate di Fourier di distribuzioni temperate. Teorema di Plancherel e trasformata di una funzione di L^2 . Funzioni analitiche. Trasformata di Fourier-Laplace di una distribuzione a supporto compatto. Le trasformate di Fourier-Laplace di una distribuzione a supporto compatto sono analitiche intere. Teorema di Paley e Wiener (solo enunciato).

Spazi di Sobolev

Spazi di Sobolev in dimensione 1. Generalità sullo spazio $W^{1,p}$. Teorema del rappresentante continuo di una funzione di $W^{1,p}(I)$. Teorema di caratterizzazione di $W^{1,p}$ per $1 < p$. Prolungamento di una funzione di $W^{1,p}(I)$ a una funzione di $W^{1,p}(\mathbb{R})$. Teorema di densità di $C^\infty_0(\mathbb{R})$ in $W^{1,p}(I)$. Teorema di immersione di Sobolev. Teorema di Rellich. Corollari e osservazioni ai teoremi di Sobolev e di Rellich. Conseguenze del teorema di immersione di Sobolev: prodotto di due funzioni di Sobolev, composizione con una funzione C^1 . Spazi $W^{m,p}$. Spazio $W^{m,p}_0$, disuguaglianza di Poincaré. Problemi ai limiti, problema di Dirichlet, problema di Neumann. Principio del massimo per soluzioni del problema di Dirichlet non omogeneo in dimensione 1. Spazi di Sobolev in dimensione N . Teorema di Friedrichs. Caratterizzazione degli spazi di Sobolev per $p > 1$. Funzioni BV in dimensione N . Prodotto di due funzioni di Sobolev limitate. Composizione con una funzione C^1 . Cambio di variabile in una funzione di Sobolev. Teorema di prolungamento da funzioni definite su aperti di classe C^1 . Teorema di Sobolev, Gagliardo e Nirenberg. Corollari al teorema di Sobolev, Gagliardo e Nirenberg. Caso di $p=N$. Teorema di Morrey. Caso dell'aperto di classe C^1 con frontiera limitata. Teorema di Rellich. Immersioni di Sobolev per spazi $W^{m,p}$. Lo spazio $W^{1,p}_0$ e le sue caratterizzazioni. La disuguaglianza di Poincaré. Alcuni esempi di problemi ai limiti per equazioni alle derivate parziali in spazi di Sobolev.

Testi di riferimento

E. Hewitt, K. Stromberg, Real and Abstract Analysis, Springer Verlag.

W. Rudin, Analisi reale e complessa, Boringhieri.

A. N. Kolmogorov, S. V. Fomin, Elementi di teoria delle funzioni e di Analisi Funzionale, Ed. Mir.

L. Hörmander, Linear Partial Differential Operators, Springer Verlag.

H. Brezis, Analyse Fonctionnelle, Ed. Masson.