

$n \geq 1$ inter fissati. Oggi considereremo solo matrici $n \times n$
 A matrice (quadrata, $n \times n$).

Def. Se esiste una matrice B tale che $AB = I_n = BA$
 allora A si dice matrice invertibile.

B : matrice inversa di A , si indica con A^{-1} .

La matrice inversa di A (se esiste) è unica.

Per dimostrare che una certa cosa è unica, in matematica
 si fa spesso finta che ce ne siano due di tal certa cosa.
 Poi ci si arrabbia a verificare che coincidono.

Mel nostro caso:

siano B, B' due matrici $n \times n$ tali che $AB = BA = I_n$ e
 $AB' = B'A = I_n$. Allora

$$B' = B' I_n = B' (AB) = (B'A) B = I_n B = B \quad \text{SPIEGARE}$$

ESEMPIO

$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$ è invertibile? "Facciamo finta" di sì: $A^{-1} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$

Allora $AA^{-1} = I_2$. Esplicitamente si ha

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{vmatrix} 2x+z & 2y+t \\ 5x+3z & 5y+3t \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{cioè}$$

$$\begin{cases} 2x + z = 1 \\ 2y + t = 0 \\ 5x + 3z = 0 \\ 5y + 3t = 1 \end{cases} \quad \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{scambi di righe}} \begin{vmatrix} 5 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{scambi di righe}}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{scambi di righe}} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -2 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{scambi di righe}} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$x=3 \quad y=-1 \quad z=-5 \quad t=2 \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{vediamo se funziona}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 3 + 1 \cdot (-5) & 2 \cdot (-1) + 1 \cdot 2 \\ 5 \cdot 3 + 3 \cdot (-5) & 5 \cdot (-1) + 3 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6-5 & -2+2 \\ 15-15 & -5+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

A LORO : verificare che $A^{-1}A = I_2$.

Per matrici 3×3 o più grandi quest metodo non conviene.

Data una matrice A (quadrata), si hanno due problemi.

1° PROBLEMA : sapere se A è invertibile o meno

2° PROBLEMA : se A è invertibile, calcolare A^{-1} .

PROPOSIZIONE

Se A, B sono matrici $n \times n$ invertibili, allora anche AB (che è ancora una matrice $n \times n$) è invertibile, e si ha

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} \quad (!)$$

Dim.

ASS.

$$(AB) \cdot (B^{-1}A^{-1}) \stackrel{\text{ASS.}}{=} A(BB^{-1})A^{-1} = A I_n A^{-1} = AA^{-1} = I_n$$

Analogamente si vede che $(B^{-1}A^{-1})(AB) = I_n$ ■

$$GL_n(\mathbb{R}) = \left\{ A \in \underbrace{M(n \times n)}_{\substack{\text{ad entrate} \\ \text{reali}}} \mid A \text{ è invertibile} \right\}$$

- $\forall A, B \in GL_n(\mathbb{R}) \quad AB \in GL_n(\mathbb{R}) \quad (AB \text{ è un'unica matrice})$
- $I_n \in GL_n(\mathbb{R}) \quad I_n A = A I_n = A \quad \forall A \in GL_n(\mathbb{R}) \quad \text{el. t. neutro}$
- il prodotto "righe per colonne" è associativo.
- $\forall A \in GL_n(\mathbb{R})$ esiste $A^{-1} \in GL_n(\mathbb{R})$ t.c. $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$

GRUPPO

MATRICI ELEMENTARI $n \times n$ I° tipo S_{ij} $1 \leq i < j \leq n$ fissati. S_{ij} è ottenuta da I_n scambiando tra loro le righe i, j

ES $n=3$ $i=2$ $j=3$ $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $S_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

 M matrice $n \times p$ arbitraria $S_{ij} M = ?$
 M_h : l' h -esima riga di M moltiplicando M a SX per S_{ij}

- le righe di indice $\neq i, j$ vengono lasciate dove sono
- le righe i, j vengono scambiate tra loro

$$S_{ij} \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \\ \vdots \\ M_i \\ \vdots \\ M_j \\ \vdots \\ M_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \\ \vdots \\ M_j \\ \vdots \\ M_i \\ \vdots \\ M_n \end{pmatrix}$$

In particolare $S_{ij} \cdot S_{ij} = I_n$ cioè

ogni matrice elementare del primo tipo è invertibile e
 $(S_{ij})^{-1} = S_{ij}$

II° tipo $M_{i,c}$ $1 \leq i \leq n$ fissato $c \in \mathbb{R}, c \neq 0$ fissato

 $M_{i,c}$ è ottenuta da I_n moltiplicando l' i -esima riga per c .

M matrice $n \times p$ arbitraria $M_{i,c} M = ?$

$$i - \begin{vmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & c & \\ & & & \ddots \\ & & & & 1 \end{vmatrix} \quad \left| \begin{matrix} M_i \\ \vdots \\ M_i \\ \vdots \\ M_i \end{matrix} \right| = \left| \begin{matrix} cM_i \\ \vdots \\ cM_i \\ \vdots \\ cM_i \end{matrix} \right|$$

- le righe diverse dalla i -esima vengono lasciate invariate.

- l' i -esima riga viene moltiplicata per c .

In particolare $M_{i,c} \cdot M_{i,c^{-1}} = I_n$ OK perché $c \neq 0$

Quindi:

ogni matrice elementare del secondo tipo è invertibile
e $(M_{i,c})^{-1} = M_{i,c^{-1}}$.

III° Type i, j interi fissati, con $1 \leq i, j \leq n$ e $i \neq j$
 $a \in \mathbb{R}$ fissato (qualsiasi).

$$E_{ij}(a) = \begin{vmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & \ddots \\ & & & & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} i \\ \vdots \\ i \\ \vdots \\ i \end{matrix}$$

se $j < i$

Altrimenti

SPIEGARE

$$E_{ij}(a) = \begin{vmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & \ddots \\ & & & & a \end{vmatrix} \begin{matrix} i \\ \vdots \\ i \\ \vdots \\ j \end{matrix}$$

In ogni caso $E_{ij}(a)$ è stata ottenuta a partire da I_n moltiplicando l' i -esima riga per a , ed aggiungendo quanto trovato alla riga j -esima.

M : la solita matrice $n \times p$ arbitraria

$$E_{ij}(a) M = E_{ij}(a) \begin{vmatrix} M_1 \\ \vdots \\ M_i \\ \vdots \\ M_j \\ \vdots \\ M_m \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} M_1 \\ \vdots \\ M_i \\ \vdots \\ M_j + aM_i \\ \vdots \\ M_m \end{vmatrix}$$

le righe diverse dalla j -esima vengono lasciate invariate.

← j -esima riga

$$E_{ij}(a)^{-1} = E_{ij}(-a) \quad \text{perché} \quad E_{ij}(a) E_{ij}(b) = E_{ij}(a+b)$$

Riassumendo

Tutti i tipi di matrici elementari sono invertibili, e l'inversa di una matrice elementare è ancora una matrice elementare dello stesso tipo.

~ o ~

$AX=B$ sistema di m equazioni lineari in n incognite

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

A matrice $m \times n$ detta dei coefficienti.

$|A|B|$ matrice $m \times (n+1)$ detta m. completa

Per risolvere il sistema lineare $AX=B$ trasformiamo la matrice ^{completa} $|A|B|$ fino a trasformarla in una matrice a gradini.

Ma abbiamo visto sopra che ogni operazione elementare sulle righe di $|A|B|$ si può interpretare come moltiplicazione di $|A|B|$ a SX per un'opportuna matrice elementare E $E|A|B|$

Come faccio a trovare la matrice E giusta?

Bacilissimo:

per esempio, se voglio scambiare tra loro le prime due righe di $|A|B|$, prendo $E = S_{12}$

S_{12} è stata ottenuta da I_n scambiando tra loro le prime due righe!

E così anche negli altri casi.

ESEMPIO

Supponiamo che la matrice " $|A|B|$ " sia $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = C$ SPEG.

voglio scambiare tra loro
le righe di C

$$\begin{matrix} = E_1 \\ \hline \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 2 \end{array} \right] C = \left[\begin{array}{cc|c} 5 & 3 & \\ 2 & 1 & \end{array} \right] \end{matrix}$$

11/10/16

(6)

voglio sottrarre alla 1^a riga
di $E_1 C$, la seconda moltip.
per 2

$$\begin{matrix} E_2 & E_1 \\ \hline \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{array} \right] \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 2 \end{array} \right] C = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & \\ 2 & 1 & \end{array} \right] \end{matrix}$$

voglio sottrarre alla ^{alla seconda riga} $E_2 E_1 C$, la
prima riga moltip. per 2

$$\begin{matrix} E_3 \\ \hline \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{array} \right] E_2 E_1 C = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & \\ 0 & -1 & \end{array} \right] \end{matrix}$$

voglio sommare alla 1^a riga
di $E_3 E_2 E_1 C$ la 2^a riga

$$\begin{matrix} E_4 \\ \hline \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{array} \right] E_3 E_2 E_1 C = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{array} \right] \end{matrix}$$

voglio moltiplicare la
2^a riga di $E_4 E_3 E_2 E_1 C$
per -1

$$\begin{matrix} E_5 \\ \hline \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{array} \right] E_4 E_3 E_2 E_1 C = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{array} \right] = I_2 \end{matrix}$$

Dunque
$$\overbrace{(E_5 E_4 E_3 E_2 E_1)}^D C = I_2$$

Si può dire che C è invertibile?

Quel che abbiamo è $DC = I_2$ con D m. 2×2 .

Ma non è chiaro se vale anche $CD = I_2$.

(Vedremo in seguito che quest'è OK, ma per ora...)

Possiamo ragionare così:

$$DC = I_2 \Rightarrow E_5 (E_4 E_3 E_2 E_1 C) = I_2 \Rightarrow$$

$$\underbrace{E_5^{-1} E_5}_{= I_2} (E_4 E_3 E_2 E_1 C) = E_5^{-1} I_2 = E_5^{-1} \Rightarrow E_4 (E_3 E_2 E_1 C) = E_5^{-1} \Rightarrow$$

$$\underbrace{E_4^{-1} E_4}_{= I_2} (E_3 E_2 E_1 C) = E_4^{-1} E_5^{-1} \quad \text{NOTARE L'ORDINE}$$

Ritornando si ottiene

$$C = E_1^{-1} E_2^{-1} E_3^{-1} E_4^{-1} E_5^{-1}$$

C è prodotto di matrici invertibili $\Rightarrow$

C è invertibile e $C^{-1} = E_5 E_4 E_3 E_2 E_1$ (*)

Molte $E_1^{-1}, \dots, E_5^{-1}$ sono ancora matrici elem. $\Rightarrow$

C è prodotto di matrici elementari

ESEMPIO

$$A = \begin{vmatrix} 9 & 0 & 6 \\ 0 & 4 & 0 \\ 6 & 0 & 4 \end{vmatrix}$$

$$E_1 A = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 6 & 0 & 4 \end{vmatrix}$$

$$E_2 E_1 A = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 6 & 0 & 4 \end{vmatrix}$$

$$E_3 E_2 E_1 A = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

$$E_4 E_3 E_2 E_1 A = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$E_5 E_4 E_3 E_2 E_1 A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad \text{è a gradini}$$

Non è chiaro se A è invertibile SI o NO.
Lo vedremo domani, la risposta è NO.

Comunque la (*) suggerisce un algoritmo per calcolare A^{-1} .

Data A matrice $n \times n$, si considera la matrice $n \times (2n)$ $[A | I_n]$.

Si fanno le operazioni elementari su questa matrice
 $[A | I_n] \rightsquigarrow [E_1 A | \underbrace{E_1 I_n}_{E_1}] \rightsquigarrow [E_2 E_1 A | E_2 E_1] \rightsquigarrow$
 si cerca di trasformare

questa parte in I_n . Se si riesce, nella parte a DX si ha A^{-1} pronta all'uso.