LEZIONE 14

12/10/16

RIASSUNTO (tutte le matrici son di tipo $n \times n$, salvo avviso contrario)

1) m. elementari; tre tipi: S_{ij}, $M_i(c)$ $c \in \mathbb{R}, c \neq 0$, $E_{ij}(a)$ $a \in \mathbb{R}$

2) tutte le matrici elementari sono invertibili, e la m. inversa è ancora una matrice elementare dello stesso tipo.

3) $M = \begin{vmatrix} M_1 \\ \vdots \\ M_n \end{vmatrix}$ matrice $n \times p$ E matrice $(n \times n)$ elementare

EM si ottiene

- scambiando in M le righe i, j se $E = S_{ij}$
- moltiplicando l'i-esima riga di M per c se $E = M_i(c)$
- sommando all'i-esima riga di M la j-esima moltiplicata per a se $E = E_{ij}(a)$

ELIMINAZIONE di GAUSS

Noi l'abbiamo fatta sulla matrice completa $|A \mid B|$ di un sistema lineare $AX = B$, ma si può applicare ad una matrice qualsiasi M (di tipo $n \times p$ TFI).

$$\underbrace{M \longrightarrow \longrightarrow \ldots \longrightarrow}_{\text{sequenza di operazioni elementari sulle righe di } M} M' \quad \text{più semplice di } M$$

$$M' = \underbrace{E_k \ldots E_2 \cdot E_1}_{\text{questa è m. } n \times n \text{ invertibile}} M$$

Illustriamo l'importanza che $P = E_k \ldots E_2 E_1$ sia invertibile verificando che

i sistemi lineari $AX = B$ e $(PA)X = PB$ sono equivalenti, cioè hanno le stesse soluzioni.

(lo abbiamo già dimostrato, ma con un ragionamento più goffo)

Sia $S = \begin{vmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_n \end{vmatrix}$ una soluzione di $\overbrace{AX = B}^{\text{uguaglianza condizionale}}$ SPIEG. Cioè le due matrici $n \times 1$ a primo e secondo membro di $\underbrace{AS = B}_{\text{uguaglianza effettiva}}$ coincidono. Quindi si ha anche l'uguaglianza di matrici $P(AS) = PB$

$\quad\quad\quad\quad \| $

$\quad\quad\quad (PA)S$

cioè: ai due membri ho la stessa matrice, scritta in due modi diversi e pertanto S è soluzione di $(PA)X = PB$

Viceversa (questa è la parte interessante!) sia $T = \begin{vmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_n \end{vmatrix}$ una soluzione di $(PA)X = PB$. Cioè $(PA)T = PB$ è un'uguaglianza di matrici. Ma allora

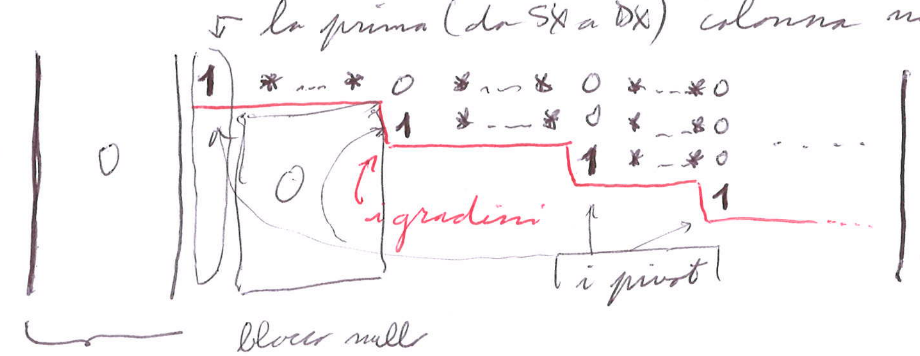
$$P^{-1}(PA)T = P^{-1}(PB) \quad \text{ovvero} \quad (P^{-1}P)AT = (P^{-1}P)B$$

$I_m AT = I_m B$ cioè $AT = B$. Pertanto T è soluzione anche di $AX = B$. ■

Tornando all'eliminazione di Gauss fatta su una matrice qualsiasi M:

in che senso M' è "più semplice" di M?

M' è una matrice a gradini (rispetto alle righe):

(1) 

"$*$" = entrata della matrice M' su cui non si ha alcun controllo. Può essere un qualsiasi elemento di $\mathbb{R}$.

questo però manca quando $M = |A|B|$ è la matrice completa di un sistema lineare.

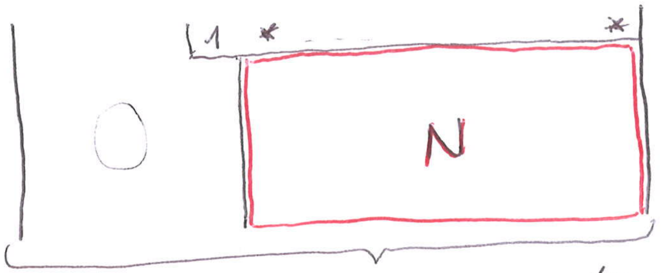
Dove non c'è scritto niente è tutto zero.

SPIEG.

(Se non c'è M è la matrice nulla e FINE

- si cerca la prima colonna non tutta nulla di M.
- scambiando le righe porto nella prima riga un el.to $\neq 0$. (ho usato un'operazione elementare del I° tipo)
- normalizzo tale elemento facendolo diventare "1" con un'op. elem. del II° tipo.
- con operazioni elementari del III° tipo faccio in modo che sotto tale 1 (è un pivot) ci siano tutti zeri.

A questo punto la situazione è la seguente



la matrice N ha una riga in meno della matrice M.

Se opero su questa matrice con op. elem. (E) dei tre tipi, tali ~~[illegible]~~ da avere $|1\ 0\ 0 - 0|$ come prima riga, allora non modifico più la prima riga e vado solo ad influire su N. Quindi posso riapplicare il procedimento (con operazioni elementari!) ad N. E così via.

Infine, con operazioni elementari del III° tipo posso fare in modo che

- gli elementi al di sopra di un pivot siano tutti nulli

Le altre due condizioni cui deve soddisfare la matrice M' sono (lo ricordiamo):

- il primo elemento $\neq 0$ in ciascuna riga è 1 (pivot)
- il primo el.to $\neq 0$ della $(i+1)$-esima riga si trova a DX del primo el.to $\neq 0$ dell'i-esima riga.

Cioè: una matrice è a gradini se soddisfa tutte queste tre condizioni. Tali condizioni hanno la seguente conseguenza, importante per noi:

PROPOSIZIONE   SPIEGARE   DICOTOMIA: o succede una cosa, o succede un'altra cosa

Sia M una matrice $n \times n$ (quadrata!), a gradini. Allora o $M = I_n$, oppure l'ultima riga di M è nulla.

Prima di sfruttare questo, raccogliamo una conseguenza dell'eliminazione di Gauss per la risoluzione dei sistemi lineari (è una cosa che a suo tempo probabilmente non ho detto con la precisione dovuta)

$AX=B$ sist. lineare $(PA)X=PB$ il sist. lineare (equivalente), ottenuto con l'eliminazione di Gauss. Cioè $P|A|B| = |PA|PB|$ è m. a gradini. Allora

PROPOSIZIONE

$AX=B$ è compatibile (cioè: ammette soluzioni) se e solo se la colonna PB di $P|A|B|$ non contiene pivot.
In tal caso si può dare all'incognita x_j un valore arbitrario se la colonna j-esima di PA non contiene pivot (tali x_j si chiamano parametri liberi)

"liberi" di assumere un qualsiasi valore

COROLLARIO

Ogni sistema lineare omogeneo $AX=0$ di m equazioni ed $n>m$ incognite ammette soluzioni non banali.

Dim. Infatti, la condizione $m<n$ assicura che in PA ci saranno colonne prive di pivot. Se la j-esima colonna di PA è priva di pivot, diamo ad x_j un qualsiasi valore $\neq 0$. ∎

TEOREMA

Sia A una matrice quadrata $n\times n$. Allora sono equivalenti le condizioni:

1) A può essere ridotta ad I_n mediante una sequenza di operazioni elementari sulle righe.

2) A è un prodotto di matrici elementari.

3) A è invertibile.

4) Il sistema lineare omogeneo $AX=0$ ammette solo la soluzione banale $X=0$.

Dim. Proveremo che

$$\begin{tikzcd} 1) \arrow[r, Rightarrow] & 2) \arrow[d, Rightarrow] \\ 4) \arrow[u, Rightarrow] & 3) \arrow[l, Rightarrow] \end{tikzcd}$$

1) $\Rightarrow$ 2) (vista più o meno ieri). L'ipotesi è che esistano matrici elementari $E_1, \dots, E_k$ tali che $E_k \cdots E_2 E_1 A = I_n$. Allora $E_{k-1} \cdots E_1 A = E_k^{-1}, \dots$

$A = E_1^{-1} E_2^{-1} \cdots E_k^{-1}$ $\quad E_i$ m. elementare $\Rightarrow E_i^{-1}$ m. element.

e 2) è provato.

2) $\Rightarrow$ 3) ogni m. elem. è invertibile ed il prodotto di matrici invertibili è invertibile.

3) $\Rightarrow$ 4) Sia $S = \begin{vmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_n \end{vmatrix}$ una soluzione di $AX=0$. Allora $AS=0$ è soddisfatta. Moltiplico a SX membro a membro per A^{-1}: $A^{-1}(AS) = A^{-1}0 = \underline{\underline{0}}$ spiegare

$A^{-1}(AS) = (A^{-1}A)S = I_n S = \underline{\underline{S}}$.

4) $\Rightarrow$ 1) Dimostriamolo per assurdo, cioè neghiamo la tesi: Supporremo, cioè, che mediante l'algoritmo di eliminazione di Gauss non sia possibile ridurre A ad I_n. Allora per la proposizione "DICOTOMIA" il sistema $AX=0$ è equivalente ad un S.L. lineare omogeneo in n incognite con meno di n equazioni. In tal caso, per un corollario visto sopra, $AX=0$ ha anche soluzioni non banali. Assurdo! SPIEG.

$\blacksquare$

COROLLARIO

Se una matrice quadrata contiene una riga nulla, allora non è invertibile.

Dim. Sia M tale matrice. Con un opportuno scambio di righe ottengo

$$\underset{\substack{\uparrow\\ \text{SPIEG.}}}{E}M = \left|\begin{matrix} N' \\ \hline 0 \end{matrix}\right| \qquad M \ n\times n \qquad N' \ (n-1)\times n$$

Posso andare avanti con l'eliminazione di Gauss con matrici elementari $F=(f_{ij})$ tali che l'ultima riga è $0\,0 \dots 0\,1$. Queste modificano solo N' (cioè: le prime $n-1$ righe), lasciando invariata l'ultima riga. Quindi facendo l'eliminazione di Gauss su M non riesco ad ottenere mai I_n.
Allora il teorema precedente mi dà la tesi.

ESEMPIO DI APPLICAZIONE

Ieri abbiamo visto: $A = \begin{vmatrix} 9 & 0 & 6 \\ 0 & 4 & 0 \\ 6 & 0 & 4 \end{vmatrix}$ $\qquad \overbrace{E_5 \cdot E_4 \cdots E_1 A}^{(*)} = \underbrace{\begin{vmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}}_{=:B}$

Per il corollario precedente B non è invertibile. Allora nemmeno A è invertibile. Infatti, altrimenti, il primo membro di (*) sarebbe una matrice invertibile, essendo prodotto righe per colonne di matrici tutte invertibili. Quindi B sarebbe invertibile, assurdo.

COROLLARIO
PROPOSIZIONE

Sia A m. quadrata $n\times n$. Se esiste B $n\times n$ t.c. $AB = I_n$, allora A è invertibile e $A^{-1}=B$. (cioè: NON serve controllare che valga anche $BA = I_n$) SPIEGARE!

Dim. Faccio l'eliminazione di Gauss per A:

$A' = E_k \dots E_1 A$ $\quad$ A' è a gradini. Ora

$A'B = E_k \dots E_1 AB = E_k \dots E_1 I_n = \overbrace{E_k \dots E_1}$ } è invert. SPIEG.

Dunque $A'B$ è invertibile.
A' è a gradini, dunque o $A' = I_n$ o l'ultima riga di A' è tutta nulla. In questo secondo caso, anche l'ultima riga di $A'B$ sarebbe tutta nulla SPIEG., e quindi $A'B$ non sarebbe invertibile. ~~Dunq~~ assurdo!
Dunque $A' = I_n$. Per il teorema si ha, allora, che A è invertibile perché da $A' = I_n$ segue $A = E_k \cdots E_1$.
Infine, da $AB = I_n$ e A invertibile ($\Leftrightarrow \exists A^{-1}$) segue

$$\begin{aligned} A^{-1}(AB) &= A^{-1} I_n = A^{-1} \\ \| \quad & \\ (A^{-1}A)B &= I_n B = B \end{aligned}$$

cioè $B = A^{-1}$ ■