Esercizi n.2

key words: derivate direzionali di ordine superiore a 1, matrice hessiana, formula di Taylor, forma quadratica definita positiva e negativa, punti di massimo, di minimo e di sella.

1) Trovare i punti stazionari e dire se si tratta di punti di massimo, di minimo o di sella per le funzioni

$$x^2 + y^3, \qquad x^3 + 6xy + y^2, \qquad x^2 + y^2 + z^2 + xyz,$$

$$x^3 + xy + y^2 + yz + z^2, \qquad \sin(x-y)\cos x, \qquad (x^2+y^2)e^{-(x^2+y^2)}.$$

2) Sia $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$. Consideriamo la funzione $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ così definita:

$$f(x) = \langle x, Ax \rangle = \sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j} x_i x_j$$

Determinare l'insieme dei punti critici di f. Cosa si può dire sulla natura dei punti critici trovati se:

1. A è definita positiva/negativa;
2. A è semidefinita positiva/negativa.

3) Scrivere la formula di Taylor per la funzione e^{x+y^2} fino al secondo ordine relativamente al punto $(1,1)$.

4) Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una funzione C^2. Supponiamo che esista $K > 0$ tale che

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x_i}(y) \right| \le K \qquad \forall\, i \in \{1, \ldots, n\} \quad \forall y \in \mathbb{R}^n$$

Dimostrare che

$$|f(x) - f(y)| \le K\sqrt{n}\|x - y\| \qquad \forall\, x, y \in \mathbb{R}^n$$

5) Si consideri la funzione

$$f(x,y) = \frac{x - y + 1}{x + y + 2}.$$

- Si determini il dominio e il segno della funzione f.
- Si determini l'equazione del piano tangente al grafico della f nel punto $(1, 1, 1/4)$.

- Si scriva la formula di Taylor con resto di Peano di f arrestata al secondo ordine, relativamente al punto $(2,2)$.
- Si determinino i punti stazionari di f e se ne discuta la natura.
- Si determinino sup e inf per f sul suo dominio.

6) Si considerino le funzioni

$$f(x,y) = 2(x^2+y^2) - (x^4+y^4), \qquad g(x,y) = y^2 + x^2y - y.$$

- Si determini il gradiente di f e g.
- Si determini la matrice hessiana di f e g.
- Si determinino gli eventuali punti stazionari di f e g e se ne discuta la natura.
- Si calcoli il polinomio di Taylor di ordine 2 della funzione f e g nei punti $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$, $(1,2)$ rispettivamente.
- Si determinino $\inf f$, $\sup f$, $\inf g$, $\sup g$.

7) Siano $y_1, \ldots, y_m$ punti di $\mathbb{R}^n$. Consideriamo la funzione $f(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ così definita

$$f(x) = \sum_{i=1}^{m} \|x - y_i\|^2 = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} (x_j - y_{i,j})^2$$

Provare che f è una funzione convessa e trovarne il minimo assoluto.
Qual è l'interpretazione geometrica del punto di minimo trovato?

8) Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una funzione C^2 tale che Hf risulti definita positiva in ogni punto di $\mathbb{R}^n$.
Dimostrare che f presenta al più un solo punto critico.

9) Sia $f(x,y)$ una funzione di classe C^2 tale che per ogni (x_0, y_0) in $\mathbb{R}^2$ le funzioni

$$t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(t, y_0) \qquad t \mapsto \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, t)$$

sono entrambe crescenti su $\mathbb{R}$.
Si può concludere che f convessa su $\mathbb{R}^2$?
Dimostrare l'asserto o produrre un controesempio.

10)

- Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^2. Supponiamo che f presenti due punti di minimo relativo distinti.
  Dimostrare che f presenta almeno un punto di massimo relativo. Dove si trova rispetto ai due minimi?

- (*) Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^2. Supponiamo che f presenti due punti di minimo relativo distinti, x_0 e x_1.
  Le ipotesi sono sufficienti ad affermare che f deve avere necessariamente un altro punto critico, distinto dai due minimi? Dimostrare l'asserto o produrre un controesempio.