

ESEMPIO 1

A matrice $m \times n$, ad entrate in $\mathbb{R}$, fissata. $L_A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$
 sia l'applicazione

$$v = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} \mapsto L_A(v) := A \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^m \quad \text{prodotto righe} \times \text{colonne} \quad \forall v \in \mathbb{R}^n.$$

$m \times n$ $n \times 1$

Abbiamo detto (non ancora dimostrato!) che il prodotto $n \times c$ è distributivo rispetto alla somma. Allora, per ogni $v, w \in \mathbb{R}^n$ si ha

$$\underline{L_A(v+w)} = A \left(\begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix} \right) = A \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} + A \begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix} = \underline{L_A(v) + L_A(w)}$$

Analogamente, per ogni $v \in \mathbb{R}^n$ ed ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ si ha

$$\underline{L_A(\lambda v)} = A \left(\lambda \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} \right) = \lambda A \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = \underline{\lambda L_A(v)}$$

ESEMPIO 2

Sia U spazio vettoriale su $\mathbb{R}$, e sia $u_1, \dots, u_n$ una base di U . Per ogni $t \in U$ esistono, unici $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ tali che $t = a_1 u_1 + \dots + a_n u_n$. Allora abbiamo un'applicazione $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ definita da

$$f(t) = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n.$$

Se $w = b_1 u_1 + \dots + b_n u_n$ è un altro el. t arbitrario di U , allora si ha

$t+w = (a_1+b_1)u_1 + \dots + (a_n+b_n)u_n$, e quindi

$$\underline{f(t+w)} = \begin{bmatrix} a_1+b_1 \\ \vdots \\ a_n+b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = \underline{f(t) + f(w)}$$

$$\lambda \in \mathbb{R} \quad \lambda t = (\lambda a_1)u_1 + \dots + (\lambda a_n)u_n \implies \underline{f(\lambda t) = \lambda f(t)}$$

Def. Siano U, V spazi vettoriali sullo stesso camp. $\mathbb{R}$. Sia $f: U \rightarrow V$ un' applicazione, cioè f è una "legge" che associa ad ogni el. u di U uno ed un solo elemento di V .

EIOE': si possono avere diversi elementi di U , a ciascuno dei quali è associato lo stesso elemento di V

per esempio $f(u) = 0_V \quad \forall u \in U$ va benissimo SPIEGARE

Allora f è detta un' APPLICAZIONE LINEARE (o un OMOMORFISMO tra spazi vettoriali) se valgono entrambe le condizioni:

- 1) $f(u+u') = f(u) + f(u') \quad \forall u, u' \in U$
- 2) $f(\lambda u) = \lambda f(u) \quad \forall u \in U, \forall \lambda \in \mathbb{R}$.

(f "rispetta" le operazioni nei due spazi vett.)

• $f(0_U) = 0_V$

Infatti: preso arbitrariamente $u \in U$ si ha

$$f(0_U) = f(0_{\mathbb{R}} \cdot u) = 0_{\mathbb{R}} \underbrace{f(u)}_{\in V} = 0_V$$

• $f(-u) = -f(u)$ $-u = (-1) \cdot u$

NUCLEO ED IMMAGINE DI f

Sia $f: U \rightarrow V$ appl. lineare

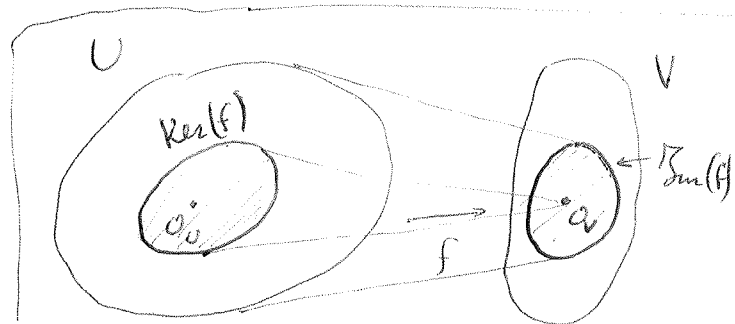
$$\text{Ker}(f) \stackrel{\text{def.}}{=} \{u \in U \mid f(u) = 0_V\} \subseteq U \quad 0_U \in \text{Ker}(f) \quad \text{Ker}(f): \text{NUCLEO di } f$$

$$\text{Im}(f) \stackrel{\text{def.}}{=} \{w \in W \mid \text{esiste } u \in U \text{ t.c. } f(u) = w\} = \underbrace{\{f(u) \mid u \in U\}}_W \subseteq W$$

$\hookrightarrow$ IMMAGINE di f

PROPOSIZIONE

$\text{Ker}(f)$ è un sottospazio vettoriale di U ; $\text{Im}(f)$ è un sott-



Dim.

Abbiamo già visto che $f(0_V) = 0_V$, cioè $0_V \in \text{Ker}(f)$.

Se $u, u' \in \text{Ker}(f)$ sono arbitrari, allora

$$f(u+u') = f(u) + f(u') = 0_V + 0_V = 0_V \Rightarrow u+u' \in \text{Ker}(f).$$

Se $u \in \text{Ker}(f)$, $\lambda \in \mathbb{R}$ sono arbitrari, allora

$$f(\lambda u) = \lambda f(u) = \lambda \cdot 0_V = 0_V \Rightarrow \lambda u \in \text{Ker}(f).$$

$f(0_V) = 0_V$ implica anche che $0_V \in \text{Im}(f)$.

COMMENTARE

$f(u), f(u') \in \text{Im}(f)$ arbitrari. Allora $f(u) + f(u') = f(u+u') \in \text{Im}(f)$

$f(u) \in \text{Im}(f)$, $\lambda \in \mathbb{R}$ arbitrari. Allora $\lambda f(u) = f(\lambda u) \in \text{Im}(f)$

Fissato $u_0 \in U$ $f(u_0) \in V$

PBL Com'è "fatto" l'insieme di tutti gli $u \in U$ tali che

$$f(u) = f(u_0) ? \quad \{u \in U \mid f(u) = f(u_0) = v_0\} = f^{-1}(v_0)$$

CONTROIMMAGINE di v_0

(non è in ballo alcuna "applicazione inversa", o "funzione inversa").

$$f(u) = f(u_0) \Leftrightarrow f(u) - f(u_0) = 0_V \Leftrightarrow f(u) + f(-u_0) = 0_V \Leftrightarrow f(u - u_0) = 0_V$$

$$\Leftrightarrow u - u_0 \in \text{Ker}(f)$$

$$f^{-1}(f(u_0)) = \{u_0 + w \mid w \in \text{Ker}(f)\} = "u_0 + \text{Ker}(f)" \quad (2)$$

Formalizziamo la cosa:

PROPOSIZIONE

è un'ipotesi "qualitativa" su f

$f: U \rightarrow V$ applicazione lineare. Allora f è iniettiva $\Leftrightarrow$

$$\text{Ker}(f) = \{0_U\}.$$

Dim.

Sia f iniettiva, e sia $u \in \text{Ker}(f)$ arbitrari. Allora

$$f(u) = 0_V = f(0_U) \xrightarrow{\downarrow} u = 0_U, \text{ dunque } \text{Ker}(f) = \{0\}.$$

Viceversa, supponiamo che sia $\text{Ker}(f) = \{0_V\}$. 17/10/16 (4)
 Se $u, u' \in V$ sono tali che $f(u) = f(u')$, allora abbiamo
 visto sopra che $u - u' \in \text{Ker}(f) = \{0_V\}$, cioè $u - u' = 0_V$,
 ovvero $u = u' + 0_V = u'$. Dunque f è iniettiva. ■

ESEMPIO 3 (è un caso particolare dell' Esempio 1)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$f = L_A: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \text{ arbitrario}$$

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ u_2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ u_3 \end{pmatrix} = u_1 e_1 + u_2 e_2 + u_3 e_3$$

$$f(u) = L_A(u) = A u = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 + 2u_2 - u_3 \\ u_2 + u_3 \\ u_1 + u_2 - 2u_3 \end{pmatrix} =$$

$$= u_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + u_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + u_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

OSSERVAZIONE IMPORTANTE:

le colonne della matrice A
 sono un sistema di gene-
 ratrici per $\text{Im}(L_A)$. SPIEGA

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ sono L.I.N. I.I.W.D.P.?}$$

Per scoprirlo, facciamo operazioni
 elementari sulle colonne di A

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

la terza colonna è combi-
 lineare delle altre due

$$\text{Im}(L_A) = \text{Span} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right) = \text{Span} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \quad \underline{\dim(\text{Im}(L_A)) = 2}$$

L.I.N. I.I.W.D.P.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = L_A(e_1) \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = L_A(e_2) \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = L_A(e_3)$$

Le operazioni elementari
 fatte sopra si possono inter-
 pretare così:

$$L_A(e_2) - L_A(e_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = L_A(e_3) + 2 L_A(e_1) \quad \text{cioè} \quad L_A(e_2 - e_1) = L_A(e_3 + 2e_1)$$

da cui:

$$L_A(e_3 + 2e_1 - (e_2 - e_1)) = 0_{\mathbb{R}^3} \Leftrightarrow e_3 + 2e_1 + e_1 - e_2 = 3e_1 - e_2 + e_3 \in \text{Ker}(L_A)$$

$$3e_1 - e_2 + e_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-3+2(-1)+(-1)\cdot 1 \\ 0-3+1(-1)+1\cdot 1 \\ 1-3+1(-1)+(-2)\cdot 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

Se volessimo cercare direttamente $\text{Ker}(L_A)$?

$$\text{Ker}(L_A) = \left\{ \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix}}_{L_A(u)} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

è il sistema lineare omogeneo indistinto dalla matrice A !

operazioni elementari sulle righe

$$\begin{cases} u_1 + 2u_2 - u_3 = 0 \\ u_2 + u_3 = 0 \\ u_1 + u_2 - 2u_3 = 0 \end{cases} \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ \textcircled{1} & 1 & -2 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{row 3} - \text{row 2}} \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & \textcircled{-1} & -3 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{row 3} \times (-1)} \begin{vmatrix} 1 & \textcircled{2} & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{row 1} - 2 \times \text{row 2}} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$u_1 = 3u_3$$

$$u_2 = -u_3$$

la soluzione generale è $(3u_3, -u_3, u_3)$

$$\text{Ker}(L_A) = \left\{ \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\} \quad \underline{\dim(\text{Ker}(L_A)) = 1}$$

Quest'interpretazione col sistema lineare è ottima:

PBL Che cosa significa che per un fissato $b_0 = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ il sistema lineare $Ax = b_0$ sia compatibile?

Semplicemente che $b_0 \in \text{Im}(L_A)$. SPIEGARE

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \in \text{Im}(L_A) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha + \beta \\ \beta \\ \alpha \end{pmatrix} \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R} \text{ opportuni}$$

Prendiamo un tale $b_0 \in \mathbb{R}^3$ e risolviamo il sistema $Ax = b_0$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = \alpha + \beta \\ x_2 + x_3 = \beta \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = \alpha \end{cases}$$
 è la somma della seconda e terza equazioni.
 Una soluzione particolare di quest sistema è, allora:

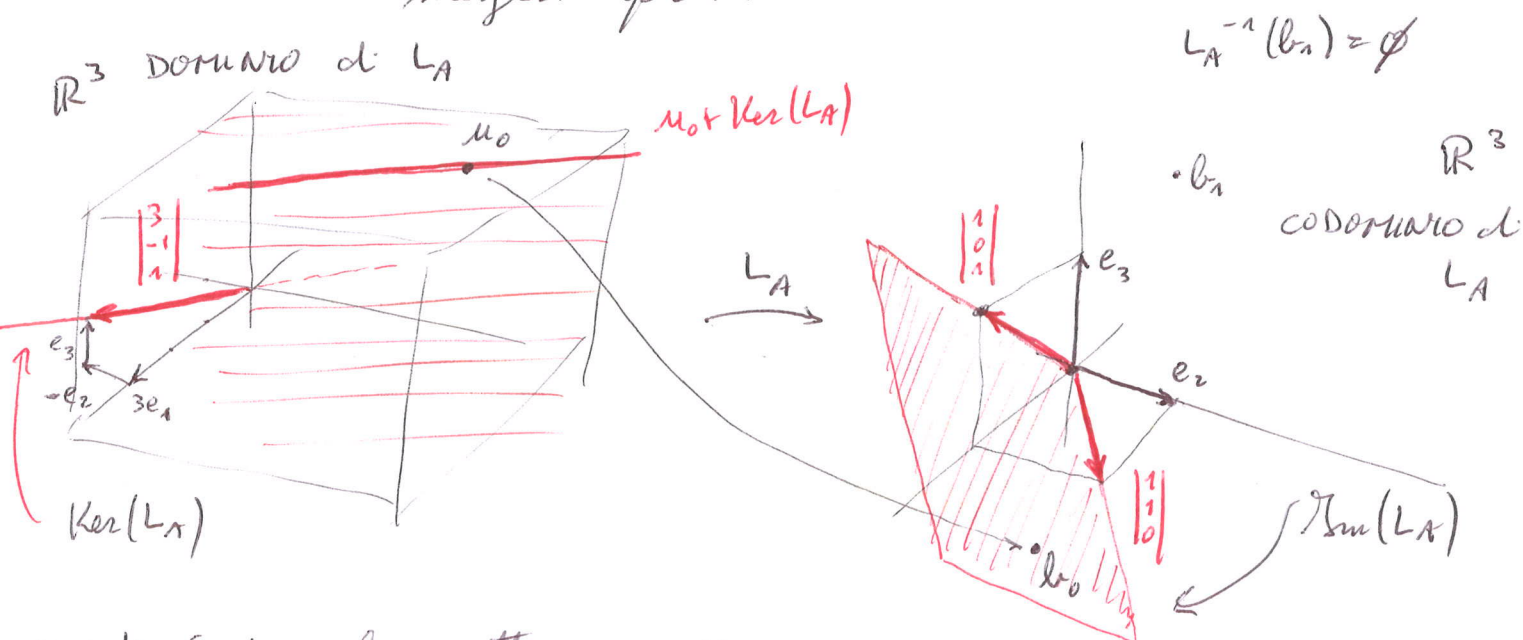
$$x_3 = 0 \Rightarrow x_2 = \beta \Rightarrow x_1 = \alpha - \beta.$$

$$u_0 = \begin{pmatrix} \alpha - \beta \\ \beta \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \quad \text{è t. c.} \quad L_A(u_0) = b_0 = \begin{pmatrix} \alpha + \beta \\ \beta \\ \alpha \end{pmatrix}$$

La soluzione generale del sistema lineare $Ax = b_0$ è, allora

$$u_0 + w = \begin{pmatrix} \alpha - \beta \\ \beta \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha - \beta + 3\lambda \\ \beta - \lambda \\ \lambda \end{pmatrix} \quad \lambda \in \mathbb{R} \text{ arbitrario}$$

$w \in \text{Ker}(L_A)$
 da un punto di vista GEOMETRICO si capisce meglio questa.



$u_0 + \text{Ker}(L_A)$ è la retta per u_0 ,
 parallela a $\text{Ker}(L_A)$. Tutto il $\mathbb{R}^3$ dominio di L_A si
 ottiene come unione di infinite rette, tutte parallele tra
 loro. ("pacco di spaghetti") $\hookrightarrow$ SPIEGARE.

RIASSUMENDO

A : qualsiasi matrice $m \times n$. Allora $L_A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$

• $\text{Ker}(L_A)$ è il sottospazio di $\mathbb{R}^n$ formato da tutte le soluz. del sistema lineare omogeneo $AX=0$.

• $\text{Im}(L_A)$ è il sottospazio di $\mathbb{R}^m$ formato da tutti i vettori B per i quali $AX=B$ è compatibile.

• TEOREMA DI STRUTTURA per l'insieme di tutte le soluzioni di $AX=B$

Se $B \in \text{Im}(L_A)$, allora l'insieme di tutte le soluz. di $AX=B$ è

$$\{u_0 + w \mid w \in \text{Ker}(L_A)\} \quad \text{e} \quad u_0 : \text{sol. particolare di } AX=B.$$

$$\begin{array}{l} \text{"sol. GENERALE"} \\ \text{di } AX=B \end{array} = \begin{array}{l} \text{sol. PARTICOLARE} \\ \text{di } AX=B \end{array} + \begin{array}{l} \text{sol. GENERALE"} \\ \text{di } AX=0 \end{array}$$

OSSERVAZIONE

Se $B \neq 0_{\mathbb{R}^m}$, allora $\{u_0 + w \mid w \in \text{Ker}(L_A)\}$ NON È un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.