LEZIONE 17 | 19/10/16 | 1

U, V sp. vett. $/\mathbb{R}$ $f: U \longrightarrow V$ appl. lineare. Cioè:

a) $f(u+u') = f(u) + f(u')$ $\forall u, u' \in U$

b) $f(\lambda u) = \lambda f(u)$ $\forall u \in U, \forall \lambda \in \mathbb{R}$

Presi arbitrariamente $u_1, \dots, u_m \in U$ e $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$, per induzione su m (a partire dal caso $m=2$, che è regolat dalle proprietà a), b) qui sopra) si prova che

$$\boxed{f(\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_m u_m) = \lambda_1 f(u_1) + \dots + \lambda_m f(u_m)} \quad (1)$$

Per capire che cosa significano queste parole, vediamo come si prova il caso $m=3$, sapendo che se $m=2$ la proprietà (1) è vera.

$$f(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3) \overset{\text{assoc. dell' addizione in } U}{=} f(\{\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2\} + \lambda_3 u_3) \overset{a)}{=}$$

$$= f(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2) + f(\lambda_3 u_3) \overset{b)}{=} f(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2) + \lambda_3 f(u_3) \overset{\text{CASO } m=2 \text{ | l'IPOTESI INDUTTIVA}}{=}$$

$$= \lambda_1 f(u_1) + \lambda_2 f(u_2) + \lambda_3 f(u_3)$$

Supponiamo che $u_1, \dots, u_m$ sia una base di U.

Allora la (1) mi dice come calcolare $f(w)$ per ogni $w \in U$. Infatti $w = \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_m u_m$ per opportuni $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in \mathbb{R}$ univocamente determinati SPIEGARE. Allora, per (1):

$$f(w) = \alpha_1 f(u_1) + \dots + \alpha_m f(u_m) \quad (1')$$

Cioè f è nota per qualsiasi vettore w di U, se conosco che valori (in V) prende sugli elementi di una base di U. Queste considerazioni si precisano nel

TEOREMA DI DETERMINAZIONE DI UN'APPLICAZIONE LINEARE

Dati due spazi vettoriali su $\mathbb{R}$, siano U e V, sia $u_1, \dots, u_m$ una base di U. Allora presi comunque (SPIEGARE) dei vettori $v_1, \dots, v_m \in V$, esiste ed è unica un'applicazione lineare $f: U \longrightarrow V$ tale che $f(u_i) = v_i \quad \forall i = 1, \dots, m$.

Dim.

Il ragionamento fatto sopra prova che (se una tale f esiste, allora) f è unica.

Proviamo che esiste una f che verifica le richieste.

Dato $w \in U$ arbitrario, esistono e sono unici $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in \mathbb{R}$ tali che $w = \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_m u_m$. Allora

(2) $f(w) := \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_m v_m$ è un ben determinato el. t. d. V.

Abbiamo così definito un'applicazione $f: U \longrightarrow V$.

Attenzione: non è ancora chiaro se f è un'appl. lineare!

Verifichiamolo!

Sia $t \in U$ qualsiasi; allora $t = \beta_1 u_1 + \dots + \beta_m u_m$. Ora

$$f(w+t) = f(\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_m u_m + \beta_1 u_1 + \dots + \beta_m u_m) =$$

$$= f((\alpha_1 + \beta_1) u_1 + \dots + (\alpha_m + \beta_m) u_m) \overset{(2)}{=} (\alpha_1 + \beta_1) v_1 + \dots + (\alpha_m + \beta_m) v_m =$$

$$= \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_m v_m + \beta_1 v_1 + \dots + \beta_m v_m = f(w) + f(t)$$

Sia $\lambda \in \mathbb{R}$ qualsiasi. Allora $\lambda w = (\lambda \alpha_1) u_1 + \dots + (\lambda \alpha_m) u_m$ da cui

$$f(\lambda w) = (\lambda \alpha_1) v_1 + \dots + (\lambda \alpha_m) v_m = \lambda(\alpha_1 v_1) + \dots + \lambda(\alpha_m v_m) =$$

$$= \lambda(\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_m v_m) = \lambda f(w)$$

Quindi la f def. in (2) è un'appl. lineare.

Infine, da (2) segue subito che $f(u_i) = v_i$. Infatti

$$u_i = 0 \cdot u_1 + \dots + 0 \cdot u_{i-1} + 1 \cdot u_i + 0 \cdot u_{i+1} + \dots + 0 \cdot u_m.$$

U, V, T : spazi vett. su $\mathbb{R}$.

f, g : applicazioni lineari

$$U \xrightarrow{f} V \xrightarrow{g} T$$
$$u \longmapsto f(u) \longmapsto g(f(u)) \overset{\text{def}}{=} (g \circ f)(u)$$

SPIEGARE l'ordine

Allora $g \circ f : U \longrightarrow T$ è ancora appl. lineare.

Dim.

$u, u' \in U$ arbitrari ($\lambda \in \mathbb{R}$ arbitrario, per dopo)

$$(g \circ f)(u + u') = g[f(u+u')] = g[f(u) + f(u')] = g(f(u)) + g(f(u'))$$

in U — in T — f è lin. — in V — g è lin

$$= (g \circ f)(u) + (g \circ f)(u').$$

EXE : giustificare le varie uguaglianze in

$$(g \circ f)(\lambda u) = g[f(\lambda u)] = g[\lambda f(u)] = \lambda g(f(u)) = \lambda (g \circ f)(u)$$

■

ESERCIZIO U, V spazi vettoriali su $\mathbb{R}$. $f : U \longrightarrow V$ appl. lineare, biettiva. Allora

1. $\dim(U) = \dim(V)$
2. Essendo f biettiva, esiste l'applicazione inversa $f^{-1} : V \longrightarrow U$ (vista nel percorso ?...). Allora f^{-1} è ancora un'applic. lineare.

Proviamo 1. (2. : a LORO, per esercizio).

Sia $u_1, \dots, u_m$ una base di U.

Vogliamo provare che $f(u_1), \dots, f(u_m)$ è una base di V

- $f(u_1), \dots, f(u_m)$ sono linearmente indipendenti:

Sia $\alpha_1 f(u_1) + \dots + \alpha_m f(u_m) = 0_V$ OSSERVAZIONE !

Allora, per la linearità di f (uso la (1) "letta alla rovescia")

$$f(\underbrace{\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_m u_m}_{\text{è un unico vettore di } U}) = 0_V$$

cioè

$$\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_m u_m \in \mathrm{Ker}(f)$$

Ma : f iniettiva $\Rightarrow \mathrm{Ker}(f) = \{0_U\}$. Dunque

$u_1, \ldots, u_m$ è base

$\alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_m u_m = 0_U \Longrightarrow \alpha_1 = \ldots = \alpha_m = 0_{\mathbb{R}}$

- $f(u_1), \ldots, f(u_m)$ è un <u>sistema di generatori</u> per V.

Sia $v \in V$ arbitrario. f suriettiva $\Rightarrow \exists\, u \in U$ t.c. $f(u) = v$

$u = \lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_m u_m$ per opportuni $\lambda_h \in \mathbb{R}$. Allora

$v = f(u) = f(\lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_m u_m) = \lambda_1 f(u_1) + \ldots + \lambda_m f(u_m)$.

Cioè: ogni elemento di V è comb. lineare di $f(u_1), \ldots, f(u_m)$

$U, V, \ldots \quad f: U \to V, \ldots$ sp. vettoriali e appl. lineari

<u>IDEE GEOMETRICHE</u>

$$\begin{tikzcd} U \arrow[d, "j"'] \\ \mathbb{R}^m \end{tikzcd}$$

j ← l'applic. <u>lineare</u> dell'Esempio 2 della lezione precedente è biiettiva!

<u>POSSIBILITÀ di CALCOLARE</u>

<u>ESEMPIO</u> (di come i due aspetti possano essere messi insieme)

$f: V \longrightarrow U$ applicazione lineare (su cui vorrei avere certe informazioni ...)

Fisso una base $\mathcal{C} = (u_1, \ldots, u_m)$ <u>SPIEGARE</u>: è <u>ordinata</u>

di U, ed una base $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ di V.

i, j sono le appl. lineari dell'Esempio 2 della lezione del 17/10

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[d, shift right, "i"'] & U \arrow[d, "j"] \\ \mathbb{R}^n \arrow[u, dashed, shift right, "i^{-1}"'] \arrow[r, "j \circ f \circ i^{-1}"'] & \mathbb{R}^m \end{tikzcd}$$

- i biiettiva $\Rightarrow \exists\, i^{-1}$
- i^{-1} è appl. lineare
- $\underbrace{j \circ f \circ i^{-1}}_{\text{vorrei "capirla" meglio}}$ è lineare.

$e_1 = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{vmatrix} \quad e_2 = \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{vmatrix} \quad \ldots \quad e_n$: la base canonica di $\mathbb{R}^n$

$i(v_h) = e_h \quad \forall h = 1, \dots, n$. Dunque

$i^{-1}(e_h) = v_h \quad \forall h$. Poniamo, poi

$f(v_h) = a_{1h} u_1 + \dots + a_{mh} u_m \qquad a_{kh} \in \mathbb{R}$

Infine, si ha per definizione di j

$$\begin{array}{c} j(f(v_h)) \\ \shortparallel \\ (j \circ f \circ i^{-1})(e_h) \end{array} = \begin{pmatrix} a_{1h} \\ a_{2h} \\ \vdots \\ a_{mh} \end{pmatrix}$$

Ci troviamo nelle ipotesi del "Teorema di determinazione di un' applicazione lineare"

$\mathbb{R}^n \qquad \mathbb{R}^m$

$e_1, \dots, e_n$ base

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \dots \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \\ a_{mn} \end{pmatrix}}_{\text{famiglia di elementi}}$$

SPIEGARE

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mn} \end{pmatrix}$$ ← matrice le cui colonne sono

prodotto righe × colonne

$L_A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ è lineare $\qquad \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \xmapsto{L_A} \underbrace{\underset{m \times n}{A} \underset{n \times 1}{\begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}}}_{m \times 1} \in \mathbb{R}^m$

Inoltre

$$L_A(e_h) = \begin{pmatrix} a_{1h} \\ a_{2h} \\ \vdots \\ a_{mh} \end{pmatrix} \qquad \forall h = 1, \dots, n$$

Ma il Teorema di determinazione di un' applicazione lineare mi dice che c'è un' unica appl. lin. $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ che manda ogni e_h nell' h-esima colonna di A. Quindi

$$\boxed{j \circ f \circ i^{-1} = L_A}$$

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{f} & V \\ {\scriptstyle i^{-1}} \uparrow & & \downarrow {\scriptstyle j} \\ \mathbb{R}^n & \xrightarrow[L_A]{} & \mathbb{R}^m \end{array}$$

idee geometriche

"conti"

A: matrice associata all' appl. lineare f, rispetto alle basi $\mathcal{B}, \mathcal{E}$: $\quad A = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}}(f)$

V spazio vettoriale di dimensione n, su $\mathbb{R}$.
$\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ base di V. Allora siamo in grado di costruire l'applicazione dell'Esempio 2 di lunedì

$c_{\mathcal{B}} : V \longrightarrow \mathbb{R}^n$ "$c_{\mathcal{B}}$" = "COORDINATE (dei vettori di V) risp. $\mathcal{B}$"

è appl. lineare e biiettiva.
In questo caso i vettori di V si comportano risp alle operazioni ed ai concetti di spazio vettoriale, correlati nello stesso modo dei loro corrispondenti in $\mathbb{R}^n$

Per esempio, se $W \subset V$ è sottosp. vettoriale, allora $c_{\mathcal{B}}(W)$ sarà sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$. Oppure se $t_1, \dots, t_s \in V$ sono LIN. INDIP., allora $c_{\mathcal{B}}(t_1), \dots, c_{\mathcal{B}}(t_s) \in \mathbb{R}^n$ saranno lin. indipendenti.
Insomma, è come chiamare le stesse cose con due nomi diversi.

$c_{\mathcal{B}}$ si dice ISOMORFISMO tra gli spazi vettoriali V e $\mathbb{R}^n$. $c_{\mathcal{B}}^{-1}$ (che esiste perché $c_{\mathcal{B}}$ è biiettiva) è ancora appl. lineare e biiettiva. Dunque $c_{\mathcal{B}}^{-1}$ è un isomorfismo tra $\mathbb{R}^n$ e V.

Se T è un altro sp. vett. di dimensione n su $\mathbb{R}$, e se $\mathcal{C} = (t_1, \dots, t_n)$ è una sua base ordinata, allora ho gli isomorfismi $c_{\mathcal{C}} : T \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $c_{\mathcal{C}}^{-1} : \mathbb{R}^n \longrightarrow T$,

$c_{\mathcal{C}}^{-1} \circ c_{\mathcal{B}} : V \longrightarrow T$

Cioè: due spazi vettoriali della stessa dimensione sono isomorfi, cioè sono sostanzialmente LO STESSO spazio vettoriale. La dimensione n mi dice TUTTO su V.