

TEOREMA d. DIMENSIONE per APPLICAZIONI LINEARI

$f: V \rightarrow W$ applicazione lineare, $\dim(V) = n$. Allora

$$(1) \boxed{\dim(V) = \dim(\text{Ker}(f)) + \dim(\text{Im}(f))}$$

Dim. $\rightarrow v_1, \dots, v_r$ sin una base di $\text{Ker}(f) \subset V$ sottospazi vett.

$v_{r+1}, \dots, v_{r+t}, \dots, v_n$ sin base di V (p. del prolungamento)

Ogni $w \in \text{Im}(f)$ è del tipo $f(v)$ per $v \in V$ opportuno.

$$v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_r v_r + \alpha_{r+1} v_{r+1} + \dots + \alpha_n v_n \quad \alpha_i \in \mathbb{R}$$

$$f(v) = f(\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n) = \alpha_1 \underbrace{f(v_1)}_{=0} + \dots + \alpha_r \underbrace{f(v_r)}_{=0} + \alpha_{r+1} f(v_{r+1}) + \dots + \alpha_n f(v_n)$$

$= 0$

Dunque: ogni el. d. $\text{Im}(f)$ è combinazione lin. d. $f(v_{r+1}), \dots, f(v_n)$

Verifichiamo che $f(v_{r+1}), \dots, f(v_n)$ sono LIN. INDIP.:

$$\text{sin } \lambda_{r+1} f(v_{r+1}) + \dots + \lambda_n f(v_n) = 0_W \quad (\text{NB!!!}) \quad \text{Allora}$$

$$\Rightarrow f(\lambda_{r+1} v_{r+1} + \dots + \lambda_n v_n) = 0_W \Rightarrow \lambda_{r+1} v_{r+1} + \dots + \lambda_n v_n \in \text{Ker}(f)$$

Quindi:

$$\lambda_{r+1} v_{r+1} + \dots + \lambda_n v_n = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_r v_r \quad \text{perché}$$

$$-\lambda_1 v_1 - \dots - \lambda_r v_r + \lambda_{r+1} v_{r+1} + \dots + \lambda_n v_n = 0_V$$

Ma $v_1, \dots, v_r, v_{r+1}, \dots, v_n$ è base di V . Quindi $\lambda_i = 0_{\mathbb{R}} \quad \forall i$

Dunque $f(v_{r+1}), \dots, f(v_n)$ è una base di $\text{Im}(f)$.

$$\text{Ovvero } \dim(\text{Im}(f)) = n - r = \dim(V) - \dim(\text{Ker}(f))$$

DA PROVARE: $\lambda_{r+1} = 0 \dots \lambda_n = 0$

ESEMPIO "Studiare" l'applicazione $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ 20/10/16 (2)
 data da $f\left(\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} u_1 + u_2 \\ 2u_3 - u_1 \end{pmatrix}$
 $\begin{matrix} \uparrow & \uparrow \\ \varepsilon_1, \varepsilon_2: \text{base canonica} \\ e_1, e_2, e_3: \text{base canonica} \end{matrix}$

• f è lineare? (SI)

mi costruisco la matrice

$$\left. \begin{aligned} f(e_1) &= f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1+0 \\ 2\cdot 0 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\ f(e_2) &= f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0+1 \\ 2\cdot 0 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ f(e_3) &= f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0+0 \\ 2\cdot 1 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \end{aligned} \right\} A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$\begin{matrix} f(e_1) & f(e_2) & f(e_3) \end{matrix}$

Si verifica immediatamente che

$$f\left(\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}\right) = A \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = L_A \left(\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}\right)$$

da cui $f = L_A$
 e L_A è lineare, anche f è lineare
 poiché

• $\text{Im}(f) = ?$

$$f(e_1) = \varepsilon_1 \quad \varepsilon_2 = \frac{1}{2} f(e_3) = f\left(\frac{1}{2} e_3\right) \quad \text{Dunque } \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \text{Im}(f)$$

$$\mathbb{R}^2 \supset \text{Im}(f) = \text{span}(f(e_1), f(e_2), f(e_3)) \supset \text{span}(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \mathbb{R}^2 \Rightarrow \underline{\text{Im}(f) = \mathbb{R}^2}$$

• $\text{Ker}(f) = ?$

Vediamo, innanzitutto, la dimensione.

$$3 = \dim(\mathbb{R}^3) = \dim(\text{Ker}(f)) + \dim(\text{Im}(f)) = \dim(\text{Ker}(f)) + 2$$

$$\Rightarrow \dim(\text{Ker}(f)) = 3 - 2 = \underline{\underline{1}}$$

Cerchiamo una base del nucleo. Ad occhio:

$$f(e_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = f(e_2) - \frac{1}{2} f(e_3) \Rightarrow$$

$$f(e_1) - f(e_2) + \frac{1}{2} f(e_3) = 0_{\mathbb{R}^2} \Rightarrow f\left(e_1 - e_2 + \frac{1}{2} e_3\right) = 0_{\mathbb{R}^2} \Rightarrow$$

$$e_1 + e_2 + \frac{1}{2}e_3 \in \text{Ker}(f) \Rightarrow 2e_1 + 2e_2 + e_3 \in \text{Ker}(f)$$

$$\text{cioè } 2 \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{vmatrix} \in \text{Ker}(f) \quad \begin{vmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{vmatrix} \neq 0 \quad \dim(\text{Ker}(f))=1$$

e si conclude che $\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ è una base di $\text{Ker}(f)$.

Determina una base di $\text{Ker}(f)$ coi cont.:

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \in \text{Ker}(f) \subset \mathbb{R}^3 \Leftrightarrow L_A \left(\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow A \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} u_1 + u_2 = 0 \\ -u_1 + 2u_3 = 0 \end{cases} \quad \text{Ker}(f) \text{ è l'insieme di tutte le soluzioni di un sistema lineare omogeneo}$$

La ~~soluzione~~ soluzione generale è $(u_1, -u_1, \frac{1}{2}u_1)$.

Per $u_1=2$ trova il vettore precedente.

ESEMPIO (di MATRICE di CAMBIAMENTO di BASE)

In $\mathbb{R}^2$ abbiamo la base canonica $e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

(NB.: la base canonica si ha SOLO negli spazi vettoriali di tipo $\mathbb{R}^n$!)

$$\mathbb{R}^2 \ni \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix} = a e_1 + b e_2$$

Anche $v_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$, $v_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ è base di $\mathbb{R}^2$ (verificarlo!). Quindi

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \lambda_1 \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \text{Mi piacerebbe trovare } \lambda_1, \lambda_2 \text{ a partire da } a, b, \text{ con "poor" funktion ...}$$

$\Updownarrow$

$$\begin{cases} 4\lambda_1 + 2\lambda_2 = a \\ \lambda_1 + 3\lambda_2 = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \quad (*) \quad A := \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Se la matrice A è

invertibile, allora $A^{-1} \left(A \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} \right) = A^{-1} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ cioè $\begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} = A^{-1} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ è la formula!

(*) $\Rightarrow$

Verifico se esiste A^{-1} :

$$\rightarrow \left| \begin{array}{cc|cc} 4 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{array} \right| \rightsquigarrow \left| \begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & 0 \end{array} \right| \rightsquigarrow \left| \begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & -10 & 1 & -4 \end{array} \right| \rightsquigarrow \left| \begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{10} & \frac{2}{5} \end{array} \right|$$

$$\rightarrow \left| \begin{array}{cc} \frac{3}{10} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{10} & \frac{2}{5} \end{array} \right|$$

A^{-1}

facio la prova

$$\left| \begin{array}{cc} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{array} \right| \left| \begin{array}{cc} \frac{3}{10} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{10} & \frac{2}{5} \end{array} \right| = \dots = I_2 \quad \underline{\text{OK}}$$

Un punto di vista un po' diverso:

$\text{id}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ $\text{id}(v) = v \quad \forall v \in \mathbb{R}^2$ è appl. lineare.

B_e : la base canonica di $\mathbb{R}^2$

$\mathcal{C} = (v_1, v_2)$ altra base di $\mathbb{R}^2$

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{\text{id}} & \mathbb{R}^2 \\ \downarrow c_{B_e} & & \downarrow c_{\mathcal{C}} \\ \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{L_P} & \mathbb{R}^2 \end{array}$$

dove A si costruisce così

$$\left| \begin{array}{cc|c} \frac{3}{10} & -\frac{1}{5} & v_1 \\ -\frac{1}{10} & \frac{2}{5} & v_2 \end{array} \right| \begin{array}{l} \text{ho introdotto} \\ \text{la matrice} \\ A^{-1} \\ \boxed{P = A^{-1}} \end{array}$$

$\text{id}(e_1) \quad \text{id}(e_2)$

$$\left| \begin{array}{c} 1 \\ 0 \end{array} \right| = \lambda_1 \left| \begin{array}{c} 4 \\ 1 \end{array} \right| + \lambda_2 \left| \begin{array}{c} 2 \\ 3 \end{array} \right| \quad \begin{cases} \lambda_1 + 3\lambda_2 = 0 \\ 4\lambda_1 + 2\lambda_2 = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} \lambda_1 = -3\lambda_2 \\ -12\lambda_2 + 2\lambda_2 = 1 \end{cases} \quad \lambda_2 = -\frac{1}{10} \Rightarrow \lambda_1 = \frac{3}{10}$$

$$\left| \begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array} \right| = \lambda_1 \left| \begin{array}{c} 4 \\ 1 \end{array} \right| + \lambda_2 \left| \begin{array}{c} 2 \\ 3 \end{array} \right| \quad \begin{cases} 4\lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 + 3\lambda_2 = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} \lambda_2 = -2\lambda_1 \\ \lambda_1 - 6\lambda_1 = 1 \end{cases} \quad \lambda_1 = -\frac{1}{5} \quad \lambda_2 = \frac{2}{5}$$

$$\mathbb{R}^2 \ni v = a e_1 + b e_2 = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2$$

$$\begin{array}{ccc} & & \\ \swarrow c_{B_e} & & \searrow c_{\mathcal{C}} \\ \left| \begin{array}{c} a \\ b \end{array} \right| & \xrightarrow{L_{A^{-1}}} & \left| \begin{array}{c} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{array} \right| \end{array}$$

$$\left| \begin{array}{c} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{array} \right| = A^{-1} \left| \begin{array}{c} a \\ b \end{array} \right|$$

formula di
cambiamento
di coordinate

COMPLEMENTARE

OSSERVAZIONE

$$(v_1 \ v_2) = \left| \begin{array}{cc} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{array} \right| = A = \left| \begin{array}{cc} L_A(e_1) & L_A(e_2) \end{array} \right|$$

ESEMPIO (e' anche "l'angolo di $\mathbb{C}$ ")

20/10/16

(5)

$\alpha \in \mathbb{R} \quad 0 \leq \alpha < 2\pi$ fissato.

$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ sia la rotazione attorno all'origine, di angolo α .

f è lineare? A occhio, sì.

Considero $\mathbb{R}^2$ come il piano di Argand-Gauss di $\mathbb{C}$.

$w \in \mathbb{C}$ fissato

$$w \cdot - : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$$

$$w \cdot - : z \mapsto wz$$

se $w = 0_{\mathbb{C}}$, quest'applicazione è costante



se $w \neq 0$, allora $w = \rho (\cos(\text{Arg}(w)) + i \sin(\text{Arg}(w)))$

$\rho \neq 0$

$\rho, \theta \in \mathbb{R}$

$\rho \geq 0$
ma

$$0 \leq \text{Arg}(w) < 2\pi$$

$$w = (\rho, \text{Arg}(w)) \quad z = (\rho', \text{Arg}(z)) \quad wz = (\rho\rho', \underbrace{\text{Arg}(w) + \text{Arg}(z)}_{\text{con un gel di buon senso!}})$$

Quindi geometricamente moltiplicare per

w significa prima dilatare ("zoomare")

il piano con un rapporto ρ , e poi ruotarlo di $\text{Arg}(w)$.

Poniamo, allora: $\rho = 1$ e $\text{Arg}(w) = \alpha$, in modo che

$w = \cos(\alpha) + i \sin(\alpha)$. (non ci sarà più, quindi, l'effetto zoom).

Sia $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ qualsiasi, che identifichiamo con $a + ib$.

Ovvero

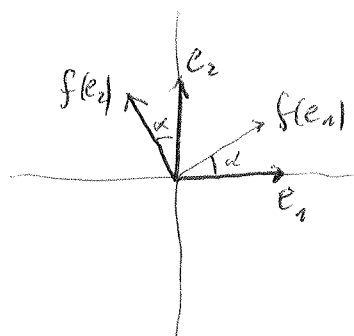
$$[\cos(\alpha) + i \sin(\alpha)][a + ib] = [\cos(\alpha) \cdot a - \sin(\alpha) \cdot b] + i [\cos(\alpha) \cdot b + \sin(\alpha) \cdot a]$$

Identifichiamo tale numero complesso col punto

$$\begin{vmatrix} \cos(\alpha) \cdot a - \sin(\alpha) \cdot b \\ \sin(\alpha) \cdot a + \cos(\alpha) \cdot b \end{vmatrix} = \underbrace{\begin{vmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{vmatrix}}_A \begin{vmatrix} a \\ b \end{vmatrix}$$

Quindi $f = L_A$, e pertanto f è lineare.

Come si poteva trovare direttamente la matrice A ?



$$f(e_1) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \end{pmatrix}$$

$$f(e_2) = \begin{pmatrix} -\sin(\alpha) \\ \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \begin{matrix} e_1 \\ e_2 \end{matrix}$$

$f(e_1) \quad f(e_2)$

PROBLEMA Esiste un SL omogeneo

il cui spazio delle soluzioni sia

$$ax + by + cz + dt = 0$$

genera equazione lineare omogenea in 4 incognite x, y, z, t $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

$$W = \text{Span} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right) \subset \mathbb{R}^4$$

Impongo che il primo vettore sia soluzione

$$a \cdot 1 + b \cdot 0 + c \cdot 0 + d \cdot 1 = 0$$

Analogamente

$$\begin{cases} a + d = 0 \\ a + 2b + 3c = 0 \\ b + 2c + 3d = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ \textcircled{1} & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & \textcircled{2} & 3 & -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & \textcircled{-1} & -7 \end{pmatrix} \rightsquigarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \textcircled{2} & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -11 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} a &= -d \\ b &= 11d \\ c &= -7d \end{aligned}$$

$d = -1$ diciamo

$$\boxed{x - 11y + 7z - t = 0}$$