

$f: U \rightarrow V$ applicazione lineare

$\dim(U) = n$ $(u_1, \dots, u_n) = \mathcal{B}$ base (ordinata) di U

$\dim(V) = m$ $\mathcal{C} = (v_1, \dots, v_m)$ " " " " V

$\forall j = 1, \dots, n$ $f(u_j) = a_{1j}v_1 + \dots + a_{mj}v_m = \sum_{i=1}^m a_{ij}v_i$ (1)

$A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$ matrice $m \times n$

$A = M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(f)$

$u \in U$ arbitrario

$u = \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_n u_n, \lambda_h \in \mathbb{R} \quad \forall h$

$f(u) = f(\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_n u_n) = \lambda_1 f(u_1) + \dots + \lambda_n f(u_n) =$

$= \lambda_1 (a_{11}v_1 + \dots + a_{m1}v_m) + \dots + \lambda_n (a_{1n}v_1 + \dots + a_{mn}v_m) =$

$= (\lambda_1 a_{11} + \lambda_2 a_{12} + \dots + \lambda_n a_{1n})v_1 +$

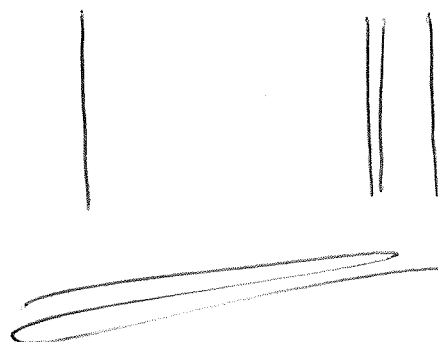
$(\lambda_1 a_{21} + \lambda_2 a_{22} + \dots + \lambda_n a_{2n})v_2 + \dots$

$+ (\lambda_1 a_{m1} + \lambda_2 a_{m2} + \dots + \lambda_n a_{mn})v_m$

Questi coefficienti mostrano che le coordinate di $f(u)$ rispetto alla base $\mathcal{C}$ si trovano facendo il prodotto righe per colonne

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$$

" " " "
" $f(u_1)$ " $f(u_2)$ " $f(u_n)$



Idea generale : scegliere le basi B, C in modo opportuno per rendere f la più "comprensibile" possibile.

ESEMPIO

$f: U \rightarrow V$ come sopra.

$u_1, \dots, u_r$: base di $\ker(f)$. La completiamo ad una base di V

$u_1, \dots, u_r, u_{r+1}, \dots, u_m$.

Nella dimostrazione del teorema di dimensione per un' applicazione lineare abbiamo visto che $f(u_{r+1}), \dots, f(u_m)$ è una base di $\text{Im}(f) \subset V$ sottospazio. La completiamo ad una base di V : $f(u_{r+1}), \dots, f(u_m), v_{m-r+1}, \dots, v_m$.

$B = (u_{r+1}, \dots, u_m, u_1, \dots, u_r)$

$C = (f(u_{r+1}), \dots, f(u_m), v_{m-r+1}, \dots, v_m)$

$M_C^B(f) = ?$

$$\begin{array}{c|cccc|cccc|c}
 m-r \left\{ \begin{array}{l} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{array} \right. & \begin{array}{l} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{array} & \begin{array}{l} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{array} & \begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{array} & \begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{array} & \begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{array} & \begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{array} & \begin{array}{l} f(u_{r+1}) \\ f(u_{r+2}) \\ \vdots \\ f(u_m) \\ v_{m-r+1} \\ \vdots \\ v_m \end{array} \\
 \hline
 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
 \end{array}$$

$f(u_{r+1}) \quad f(u_{r+2}) \quad \dots \quad f(u_m) \quad f(u_1) \quad \dots \quad f(u_r)$

non

$f: U \rightarrow V$ come sopra, $g: V \rightarrow W$ lineare

$\dim(W) = p$ $D = (w_1, \dots, w_p)$ base ordinata di W

$B = M_D^C(g)$ è una matrice $p \times m$

$g \circ f: U \rightarrow W$ è ancora lineare

$M_D^B(g \circ f) = ?$

24/10/16

(3)

$M_D^B(g \circ f)$ è una matrice $p \times m$, come BA ($p \times m / m \times n$) (q.v. righe $\times$ colonne)

L'analogia per l'appl. lineare g di quel che è la (1) per la f è

$$(2) \quad g(v_i) = \sum_{h=1}^p b_{hi} w_h$$

$$\begin{aligned} \text{Allora } g(f(u_j)) &\stackrel{(1)}{=} g\left(\sum_{i=1}^m a_{ij} v_i\right) = \sum_{i=1}^m a_{ij} g(v_i) \stackrel{(2)}{=} \\ &= \sum_{i=1}^m a_{ij} \left(\sum_{h=1}^p b_{hi} w_h \right) = \sum_{h=1}^p \left(\sum_{i=1}^m b_{hi} a_{ij} \right) w_h \end{aligned}$$

SPIEG. ?

Osserviamo che b_{hi} sono fissi. Allora

$$\sum_{i=1}^m b_{hi} a_{ij} = \left| \begin{array}{ccc} b_{h1} & \dots & b_{hm} \end{array} \right| \left| \begin{array}{c} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{array} \right| = (BA)_{hj} \leftarrow \text{SPIEG.}$$

$\uparrow$ h -esima riga di B $\uparrow$ j -esima colonna di A

Quindi

$$\boxed{M_D^B(g \circ f) = BA = M_D^E(g) M_E^B(f)}$$

~ o ~

Abbiamo visto che due spazi vettoriali isomorfi U, V (cioè esiste $f: U \rightarrow V$ lineare e biettiva; tale f si chiama isomorfismo) hanno la stessa dimensione.

Anche il viceversa.

Infatti siano B, E basi rispettivamente di U e di V , e supponiamo che abbiano entrambe n elementi

$\#(B) = n = \#(E)$. Allora abbiamo gli isomorfismi:

$$U \xrightarrow{c_B} \mathbb{R}^n$$

$$V \xrightarrow{c_C} \mathbb{R}^m \quad \text{allora}$$

24/10/16

(4)

$f := (c_C)^{-1} \circ c_B : U \rightarrow V$ è un isomorfismo.
non

U, V spazi vettoriali su $\mathbb{R}$ $\dim(U) = \dim(V) = n$. (3)

$f: U \rightarrow V$ lineare.

f iniettiva $\Leftrightarrow \ker(f) = \{0\} \Leftrightarrow \dim(\ker(f)) = 0$

f suriettiva $\Leftrightarrow \text{Im}(f) = V \Leftrightarrow \dim(\text{Im}(f)) = \dim(V)$ } del tutto generali.

B. di dimensione per appl. lineare

$$n = \dim(U) = \dim(\ker(f)) + \dim(\text{Im}(f)) \quad (4)$$

$$\begin{matrix} n \\ 0 \end{matrix} \longleftrightarrow \begin{matrix} n \\ n \end{matrix}$$

COROLLARIO (d)

$f: U \rightarrow V$ applicazione lineare. Se $\dim(U) = \dim(V) = n$, allora sono equivalenti:

a) f è isomorfismo

d) Se B, C sono basi risp. di U e di V , la matrice (quadrata, $n \times n$) $A = M_C^B(f)$ è invertibile.

b) f è iniettiva

c) f è suriettiva

Dim a) $\Leftrightarrow$ b) $\Leftrightarrow$ c) è chiaro per la (4).

a) $\Rightarrow$ d) f è isomorfismo; allora esiste $f^{-1}: V \rightarrow U$ tale che $f^{-1} \circ f = \text{id}_U$ $f \circ f^{-1} = \text{id}_V$

$$U \xrightarrow{f} V \xrightarrow{f^{-1}} U$$

$B \qquad C \qquad B$

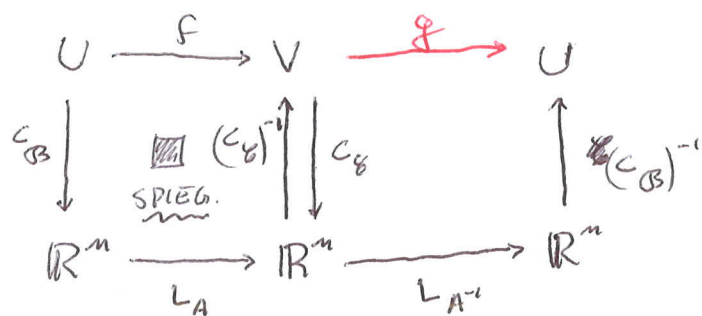
$$M_C^B(f^{-1}) \cdot M_C^B(f) = M_C^B(f^{-1} \circ f) = M_C^B(\text{id}_U) = I_n$$

mostare

Con analogamente

$$M_C^B(f) \cdot M_C^B(f^{-1}) = \dots = M_C^B(f \circ f^{-1}) = M_C^B(\text{id}_V) = I_n$$

b) $\Rightarrow$ a) per brevità poniamo $A := M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}(f)$.



$$g := (c_{\mathcal{B}})^{-1} L_{A^{-1}} c_{\mathcal{B}}$$

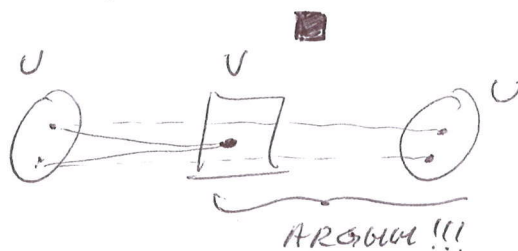
$$g \circ f = \left\{ (c_{\mathcal{B}})^{-1} L_{A^{-1}} c_{\mathcal{B}} \right\} \left\{ (c_{\mathcal{B}})^{-1} L_A c_{\mathcal{B}} \right\} = id_{\mathbb{R}^n}$$

$$g \circ f = (c_{\mathcal{B}})^{-1} L_{A^{-1}} L_A c_{\mathcal{B}} = (c_{\mathcal{B}})^{-1} L_{A^{-1}A} c_{\mathcal{B}} = (c_{\mathcal{B}})^{-1} L_{I^n} c_{\mathcal{B}} = id_U$$

In modo analogo si vede che $f \circ g = id_V$

Oppure:

$g \circ f = id_U \Rightarrow f$ è iniettiva
cioè la "vale" ("vale"
significa "è vera")



Allora si usa b) $\Rightarrow$ a).

ESERCIZIO

V spazio vettoriale su $\mathbb{R}$, $\dim(V) = n$. $p: V \rightarrow V$ a. lineare
Un tale p si dice endomorfismo. Supponiamo che
si abbia $p^2 = p \circ p = p$. Un tale endomorfismo si dice
un proiettore.

$\text{Ker}(p)$ e $\text{Im}(p)$ sono entrambi sottospazi di V .

$v \in V$ arbitrario

$$v = \underbrace{v - p(v)}_{\in \text{Ker}(p)} + \underbrace{p(v)}_{\in \text{Im}(p)} \quad \text{vedrai tradotto}$$

$$p(v - p(v)) =$$

$$= p(v) - p(p(v)) = p(v) - p(v) = 0 \Rightarrow v - p(v) \in \text{Ker}(p)$$

Quindi $\boxed{\text{Ker}(p) + \text{Im}(p) = V}$ (α)

La formula di Grassmann suggerisce di considerare

24/10/16

(6)

$$\text{Ker}(p) \cap \text{Im}(p) \ni v$$

$$v = p(u) \quad u \in V \text{ opportuna}$$

$$0_V = p(v) = p(p(u)) = u$$

$$u = 0_V \Rightarrow v = p(u) = p(0_V) = 0_V$$

$$\boxed{\text{Ker}(p) \cap \text{Im}(p) = \{0_V\}} \quad (w)$$

(a) e (w) si esprimono assieme scrivendo

$$\text{Ker}(p) \oplus \text{Im}(p) = V$$

↑ SOMMA DIRETTA

W, T sottospazi di V tali che $W+T=V$ $W \cap T = \{0\}$

$$\text{allora } W \oplus T = V$$

Ogni elemento di V si può scrivere nella forma
 $w+t$ $w \in W, t \in T$ (questo segue da $W+T=V$)

" $\oplus$ " ci dice che tale modo di scrivere v è unico

$$w+t = w'+t' \Rightarrow \underbrace{w-w'}_{\in W} = \underbrace{t'-t}_{\in T} \quad \text{dunque quest'elemento appartiene}$$

$$\text{a } W \cap T = \{0_V\}.$$

$$w-w' = 0_V \Rightarrow w=w'$$

$$t'-t = 0_V \Rightarrow t'=t$$