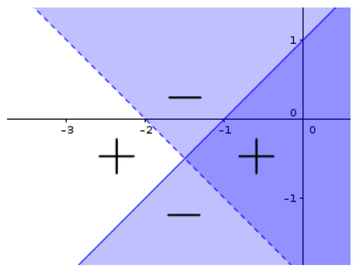
Esercizio 5, foglio 2

Si consideri la funzione
$$f(x,y) = \frac{x-y+1}{x+y+2}.$$

- **Si determini il dominio e il segno della funzione f.**

$$D = \mathbb{R}^2 \setminus \{x+y+2=0\}$$

$$\begin{aligned} N &\geq 0 & \qquad\qquad y &\leq x+1 \\ D &> 0 & \qquad\qquad y &> -x-2 \end{aligned}$$



- **Si determini l'equazione del piano tangente al grafico della f nel punto $(1,1,1/4)$.**

$$df(x,y) = grad\, f(x,y) = \left(\frac{2y+1}{(x+y+2)^2}, -\frac{2x+3}{(x+y+2)^2}\right) \xrightarrow{(1,1)} \left(\frac{3}{16}, -\frac{5}{16}\right)$$

Il piano tangente al grafico in $(1,1,\frac{1}{4})$:

$$z = \frac{3}{16}x - \frac{5}{16}y + \frac{3}{8}$$

- **Si scriva la formula di Taylor con resto di Peano di f arrestata al secondo ordine, relativamente al punto $(2,2)$.**

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} -\frac{2(2y+1)}{(x+y+2)^3} & \frac{2(x-y+1)}{(x+y+2)^3} \\ \frac{2(x-y+1)}{(x+y+2)^3} & \frac{2(2x+3)}{(x+y+2)^3} \end{pmatrix} \xrightarrow{(2,2)} \begin{pmatrix} -\frac{5}{108} & \frac{1}{108} \\ \frac{1}{108} & \frac{7}{108} \end{pmatrix}$$

Il polinomio di Taylor in $(2,2)$ sviluppato fino al 2 grado:

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \frac{1}{6} + grad\, f(2,2)((x,y)-(2,2)) \\ &\quad + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \frac{-5}{108} & \frac{1}{108} \\ \frac{1}{108} & \frac{7}{108} \end{pmatrix}((x,y)-(2,2))\cdot((x,y)-(2,2)) = \\ &= \frac{5}{108}x^2 + \frac{7}{108}y^2 + \frac{7}{36}x + \frac{31}{108}y - \frac{19}{54} \end{aligned}$$

- **Si determinino i punti stazionari di f e se ne discuta la natura.**
  Cerco quando $grad\, f = 0$

$$\begin{cases} \dfrac{2y+1}{(x+y+2)^2} = 0 \\ -\dfrac{2x+3}{(x+y+2)^2} = 0 \end{cases} \qquad \longrightarrow \qquad (x,y) = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right) \notin D$$

  f non ha punti stazionari.

- **Si determinino** sup **e** inf **per** f **sul suo dominio.** Studio il comportamento di f ai limiti del suo dominio.

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,-x_0-2)} f(x,y) = \pm\infty$$

  Dunque $sup(f(D)) = +\infty$ e $inf(f(D)) = -\infty$.