Esercizi di Analisi - foglio 2

27 ottobre 2016

4) Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una funzione C^2. Supponiamo che esista $K > 0$ tale che

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x_i}(y)\right| \leq K \qquad \forall\, i \in \{1, \dots, n\} \quad \forall y \in \mathbb{R}^n$$

Dimostrare che

$$|f(x) - f(y)| \leq K\sqrt{n}\|x - y\| \qquad \forall\, x, y \in \mathbb{R}^n$$

Dimostrazione. Considero $\nabla f(y)$ per un qualunque $y \in \mathbb{R}^n$. Vale che

$$\|\nabla f(y)\| = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(y)\right)^2 + \cdots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}(y)\right)^2} \tag{1}$$

Per ipotesi

$$0 \leq \left|\frac{\partial f}{\partial x_i}(y)\right| \leq K \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}$$

ed elevando al quadrato si ha

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(y)\right)^2 \leq K^2$$

Allora riscrivo

$$\|\nabla f(y)\| \leq \sqrt{K^2 + \cdots + K^2} = K\sqrt{n}$$

Considero ora lo sviluppo di Taylor di f nel punto $x_0 = y \in \mathbb{R}^n$ fermandomi al primo ordine, quindi si ha:

$$\begin{aligned} f(x) &= f(y) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\big(y + \xi(x - y)\big)(x_i - y_i) \\ &= f(y) + \nabla f\big(y + \xi(x - y)\big) \cdot (x - y) \end{aligned}$$

Ora se $x = y$ la tesi è banalmente verificata; supponiamo quindi $x \neq y$ e, detto θ l'angolo tra x e y, calcoliamo

$$\begin{aligned}\frac{|f(x)-f(y)|}{\|x-y\|} &= \frac{\big|\nabla f\big(y+\xi(x-y)\big)\cdot(x-y)\big|}{\|x-y\|} \\ &= \frac{\|\nabla f\big(y+\xi(x-y)\big)\|\;\|x-y\|\;|\cos\theta|}{\|x-y\|} \\ &= \|\nabla f\big(y+\xi(x-y)\big)\|\;|\cos\theta|\end{aligned}$$

Ma $|\cos\theta| \leq 1$ e per (1) $\|\nabla f\big(y+\xi(x-y)\big)\| \leq K\sqrt{n}$ quindi

$$\frac{|f(x)-f(y)|}{\|x-y\|} \leq K\sqrt{n}$$

da cui

$$|f(x)-f(y)| \leq K\sqrt{n}\|x-y\| \qquad \forall\, x, y \in \mathbb{R}^n$$

$\square$