Esercizi n.2

1) Trovare i punti stazionari e dire se si tratta di punti di massimo, di minimo o di sella per le funzioni

$$x^2 + y^3, \qquad x^3 + 6xy + y^2, \qquad x^2 + y^2 + z^2 + xyz,$$

$$x^3 + xy + y^2 + yz + z^2, \qquad \sin(x-y)\cos x, \qquad (x^2+y^2)e^{-(x^2+y^2)}.$$

Studio i punti critici della funzione:

$$f(x,y) = x^2 + y^3$$

Determino i punti stazionari calcolando il gradiente di $f(x,y) = x^2 + y^3$ e ponendo le coordinate uguali a 0.

$$\nabla f(x,y) = (2x, 3y^2)$$

Risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} 2x = 0 \\ 3y^2 = 0 \end{cases}$$

si ottiene che l'unico punto stazionario é dato da (0,0).
Per determinare la natura del punto stazionario calcoliamo la matrice Hessiana della funzione nel punto (0,0).

$$Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La matrice é semidefinita positiva in quanto i determinanti delle sottomatrici quadrate sono: 2 e 0. Proseguo ora con il calcolo degli autovalori e ottengo che il polinomio caratteristico ha forma:

$$p(\lambda) = \lambda(\lambda - 2)$$

Le radici sono dunque $\lambda = 0$ e $\lambda = 2$. Questi valori non ci permettono di determinare la natura del punto stazionario. Se restringo la funziona a $f(t,0)$ e $f(0,t)$ noto che:

$$f(t,0) = t^2$$
$$f(0,t) = t^3$$

Posso dunque concludere che il punto stazionario é una sella.

Studio ora i punti critici della funzione:

$$f(x,y) = x^3 + 6xy + y^2$$

Determino i punti stazionari calcolando il gradiente di $f(x,y) = x^3 + 6xy + y^2$ e ponendo le coordinate uguali a 0.

$$\nabla f(x,y) = (3x^2 + 6y, 6x + 2y)$$

Risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} 3x^2 + 6y = 0 \\ 6x + 2y = 0 \end{cases}$$

si ottiene che i due punti stazionari sono (0,0) e (6,-18). Studio la natura del punto (0,0) calcolando la matrice Hessiana.

$$Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$$

La matrice é semidefinita negativa in quanto i determinanti della sottomatrici quadrate sono: 0 e -36. Proseguo ora con il calcolo degli autovalori e ottengo che il polinomio caratteristico é definito:

$$p(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda - 36$$

Le radici sono dunque $\lambda = 1 + \sqrt{37}$ e $\lambda = 1 - \sqrt{37}$. Essendo i due autovalori di segno opposto si puó concludere che (0,0) é un punto di sella.
Studio ora la natura del punto (6,-18) calcolando la matrice Hessiana.

$$Hf(6,-18) = \begin{pmatrix} 36 & 6 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$$

La matrice é definita positiva per il teorema di Sylvester in quanto i determinanti delle sottomatrici quadrate sono: 36 e 36. Il punto (6,-18) é un minimo.
Studio ora i punti critici della funzione:

$$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 + xyz$$

Determino i punti stazionari calcolando il gradiente di $x^2 + y^2 + z^2 + xyz$ e ponendo le coordinate uguali a 0.

$$\nabla f(x,y,z) = (2x + yz, 2y + xz, 2z + xy)$$

Risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} 2x + yz = 0 \\ 2y + xz = 0 \\ 2z + xy = 0 \end{cases}$$

si ottiene che i punti stazionari sono (0,0,0), (-2,2,2), (2,2,-2), (2,-2,2), (-2,-2,-2).
Noto che:

$f(-x,y,z) = -f(x,y,z)$,
$f(x,-y,z) = -f(x,y,z)$,
$f(x,y,-z) = -f(x,y,z)$
allora la funzione risulta essere simmetrica rispetto ai piani xy, yz, xz, quindi studio solo la natura dei punti (0,0,0) e (-2,2,2). Studio la natura del punto (0,0,0) calcolando la matrice Hessiana.

$$Hf(0,0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

La matrice é definita positiva per il teorema di Sylvester in quanto i determinanti delle sottomatrici quadrate sono: 2, 4 e 8. Il punto (0,0,0) é un minimo.
Studio ora la natura del punto (-2,2,2) calcolando la matrice Hessiana.

$$Hf(-2,2,2) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Proseguo ora con il calcolo degli autovalori e ottengo che il polinomio caratteristico é definito:

$$p(\lambda) = -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 32 = (\lambda+2)(\lambda-4)^2$$

Le radici sono dunque $\lambda = -2$ e $\lambda = 4$. Essendo i due autovalori di segno opposto si puó concludere che (-2,2,2) é un punto di sella. Studio ora i punti critici della funzione:

$$f(x,y,z) = (x^3 + xy + y^2 + yz + z^2)$$

Determino i punti stazionari calcolando il gradiente di $(x^3 + xy + y^2 + yz + z^2)$ e ponendo le coordinate uguali a 0.

$$\nabla f(x,y,z) = (3x^2 + y, 2y + x + z, 2z + y)$$

Risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} 3x^2 + y = 0 \\ 2y + x + z = 0 \\ 2z + y = 0 \end{cases}$$

si ottiene che i due punti stazionari sono (0,0,0) e $(\frac{2}{9}, \frac{-4}{27}, \frac{2}{27})$.
Studio la natura del punto (0,0,0) calcolando la matrice Hessiana.

$$Hf(0,0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Proseguo ora con il calcolo degli autovalori e ottengo che il polinomio caratteristico é definito:

$$p(\lambda) = -\lambda^3 + \lambda^2 - 2\lambda - 2$$

Noto che $\lim_{\lambda \to +\infty} p(\lambda) = -\infty$ e $\lim_{\lambda \to -\infty} p(\lambda) = +\infty$, inoltre p(0)=-2
Allora per il teorema degli zeri un autovalore é sicuramente negativo. Studio la derivata prima di $p(\lambda)$ per trovare i punto di massimo e minimo locale.
$p'(\lambda) = -3\lambda^2 + 8\lambda - 2$. le radici sono $\lambda = \frac{4+\sqrt{10}}{3}$ e $\lambda = \frac{4-\sqrt{10}}{3}$.
Essendo $p(\frac{4+\sqrt{10}}{3}) > 0$, gli altri due autovalori saranno sicuramente positivi. Essendo gli autovalori di segno opposto si puó concludere che (0,0,0) é un punto di sella.
Studio ora la natura del punto $(\frac{2}{9}, \frac{-4}{27}, \frac{2}{17})$ calcolando la matrice Hessiana.

$$Hf(\frac{2}{9}, \frac{-4}{27}, \frac{2}{27}) = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

La matrice é definita positiva per il teorema di Sylvester in quanto i determinanti delle sottomatrici quadrate sono: $\frac{4}{3}, \frac{5}{3}$ e 2. Il punto $(\frac{2}{9}, \frac{-4}{27}, \frac{2}{17})$ é un minimo.

Studio ora i punti critici della funzione:

$$f(x, y) = (x^2 + y^2)e^{-(x^2+y^2)}$$

Determino i punti stazionari calcolando il gradiente di $(x^2 + y^2)e^{-(x^2+y^2)}$ e ponendo le coordinate uguali a 0.

$$\nabla f(x, y) = (2xe^{-(x^2+y^2)}(1 - (x^2 + y^2), 2ye^{-(x^2+y^2)}(1 - (x^2 + y^2))$$

Risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} 2xe^{-(x^2+y^2)}(1 - (x^2 + y^2) = 0 \\ 2ye^{-(x^2+y^2)}(1 - (x^2 + y^2) = 0 \end{cases}$$

Si ottengono come soluzione (0,0) e la circonferenza di raggio 1 con l'origine (0,0), $x^2 + y^2 = 1$, il cui generico punto si pu scrivere come $(\pm \sqrt{(1 - y^2)}, y)$
Studio la natura del punto (0,0) calcolando la matrice Hessiana.

$$Hf(0, 0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

La matrice é definita positiva per il teorema di Sylvester in quanto i determinati delle sottomatrici quadrate sono: 2 e 4.
Il punto (0,0) é un minimo. Per studiare la natura dei punti dati dalla circonferenza $x^2 + y^2 = 1$ mi accorgo che c' una simmetria radiale in quanto:

$$x^2 + y^2 = ||(x, y)||^2 = r^2$$

Posso dunque considerare:

$$f(r) = r^2e^{-r^2}$$

che rappresenta la sezione della superficie lungo il raggio e studiare quello che succedere alla funzione. Calcolando la derivata prima si ottiene:

$$f'(r) = -2re^{-r^2}(r^2 - 1)$$

Studiando quando essa si annulla e il suo segno si nota che in r=0 si ha un minimo (come giá dimostrato) e in r=±1 che rappresenta un massimo e corrisponde ai punti che si trovano sulla circonferenza $x^2 + y^2 = 1$ della $f(x, y)$. I punti stazionari del tipo $(\pm\sqrt{(1 - y^2)}, y)$ sono dunque tutti dei massimi.