esercizio 7

Vale la seguente caratterizzazione:

Sia $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ di classe $C^2(\Omega)$, con Ω aperto e convesso.
Allora f è convessa se e solo se la matrice hessiana di f è semidefinita positiva per ogni $\underline{x} \in \Omega$.

Nel nostro caso, f è di classe $C^2(\mathbb{R}^n)$ e inoltre $\mathbb{R}^n$ è un insieme convesso; quindi si può applicare il criterio scritto sopra per verificare che f sia convessa.
Si ha che

$$f(\underline{x}) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} (x_j - y_{i,j})^2 =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} (x_j^2 - 2x_j y_{1,j} + y_{1,j}^2) + \dots + \sum_{j=1}^{n} (x_j^2 - 2x_j y_{m,j} + y_{m,j}^2)$$

Calcolo il gradiente di f:

$$\nabla f(\underline{x}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\underline{x}), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\underline{x}) \right) =$$

$$= \big((2x_1 - 2y_{1,1}) + (2x_1 - 2y_{2,1}) + \dots + (2x_1 - 2y_{m,1}), \dots, (2x_n - 2y_{1,n}) + \dots + (2x_n - 2y_{m,n}) \big)$$

$$= \left(2\left(n x_1 - \sum_{j=1}^{m} y_{j,1}\right), 2\left(n x_2 - \sum_{j=1}^{m} y_{j,2}\right), \dots, 2\left(n x_n - \sum_{j=1}^{m} y_{j,n}\right) \right)$$

Calcolo l'hessiana di f:

$$Hf(\underline{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2n & & & 0 \\ & 2n & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 2n \end{pmatrix}$$

$n > 0$ e quindi, per Sylvester, $Hf(\underline{x})$ è definita positiva $\forall\, \underline{x} \in \mathbb{R}^n$
e quindi f è convessa su $\mathbb{R}^n$.

Il minimo assoluto di f va ricercato nei punti stazionari di f.
Imponiamo quindi

$$\nabla f(\underline{x}) = 0 \iff \underline{x} = \left(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^{m} y_{j,1}, \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{m} y_{j,2}, \dots, \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{m} y_{j,n} \right)$$

Essendo $Hf(\underline{x})$ definita positiva, il punto stazionario trovato è di minimo.
Tale minimo è inoltre assoluto perché f è convessa.