Analisi 3A - Esercizio 6, foglio 2

31 ottobre 2016

6) Si considerino le funzioni:

$$f(x,y) = 2(x^2 + y^2) - (x^4 + y^4), g(x,y) = y^2 + x^2y - y$$

- Si determini il gradiente di f e di g.
- Si determini la matrice hessiana di f e di g.
- Si determinino gli eventuali punti stazionari di f e g e se ne discuta la natura.
- Si calcoli li polinomio di Taylor di ordine 2 delle funzioni f e g nei punti $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$, $(1,2)$ rispettivamente.
- Si determinino $inf\{f\}$, $sup\{f\}$, $inf\{g\}$, $sup\{g\}$.

<u>*Soluzione:*</u>

$$\begin{aligned}
\nabla f\left(x,y\right) &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) \\
&= \left(4\left(x - x^3\right), 4\left(y - y^3\right)\right) \\
\nabla g\left(x,y\right) &= \left(\frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y}\right) \\
&= \left(2xy, 2y + x^2 - 1\right)
\end{aligned}$$

$$Hf\left(x,y\right) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 - 12x^2 & 0 \\ 0 & 4 - 12y^2 \end{pmatrix}$$

$$Hg\left(x,y\right)=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 g}{\partial x\partial y}\\ \dfrac{\partial^2 g}{\partial y\partial x} & \dfrac{\partial^2 g}{\partial y^2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2y & 2x\\ 2x & 2\end{pmatrix}$$

Punti stazionari di f:

$$\nabla f\left(x,y\right)=\left(0,0\right)\leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x-x^3 & =0\\ y-y^3 & =0\end{cases}\rightarrow\begin{cases} x & =0,\pm 1\\ y & =0,\pm 1\end{cases}\rightarrow\begin{matrix}(0,0) & (0,1) & (0,-1)\\ (1,0) & (1,1) & (1,-1)\\ (-1,0) & (-1,1) & (-1,-1)\end{matrix}$$

$$Hf\left(0,0\right)=\begin{pmatrix}4 & 0\\ 0 & 4\end{pmatrix}$$

$\rightarrow$ Gli autovalori sono tutti positivi $\Rightarrow$ la matrice è definita positiva. $\Rightarrow (0,0)$ è punto di minimo.

$$Hf\left(0,1\right)=Hf\left(0,-1\right)=\begin{pmatrix}4 & 0\\ 0 & -8\end{pmatrix}$$

$\rightarrow$ Un autovalore positivo e uno negativo $\Rightarrow \left(0,1\right),\left(0,-1\right)$ sono punti di sella.

$$Hf\left(1,0\right)=Hf\left(-1,0\right)=\begin{pmatrix}-8 & 0\\ 0 & 4\end{pmatrix}$$

$\rightarrow$ Un autovalore positivo e uno negativo $\Rightarrow \left(1,0\right),\left(-1,0\right)$ sono punti di sella.

$$Hf\left(1,1\right)=Hf\left(1,-1\right)=Hf\left(-1,1\right)=Hf\left(-1,-1\right)=\begin{pmatrix}-8 & 0\\ 0 & -8\end{pmatrix}$$

$\rightarrow$ Tutti gli autovalori sono negativi $\Rightarrow$ la matrice è definita negativa $\Rightarrow \left(1,1\right),\left(1,-1\right),\left(-1,1\right),\left(-1,-1\right)$ sono punti di massimo.

Punti stazionari di g:

$$\nabla g\left(x,y\right)=\left(0,0\right)\leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 2xy & =0\\ 2y+x^2-1 & =0\end{cases}\rightarrow\left(0,\frac{1}{2}\right),\left(1,0\right),\left(-1,0\right)$$

$$Hg\left(0,\frac{1}{2}\right)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$$

$\rightarrow$ Gli autovalori sono tutti positivi $\Rightarrow$ la matrice è definita positiva. $\Rightarrow \left(0,\frac{1}{2}\right)$ è punto di minimo.

$$Hg\left(1,0\right)=\begin{pmatrix}0 & 2\\ 2 & 2\end{pmatrix}$$

$\rightarrow Det\left(Hg\left(1,0\right)\right)=-4\Rightarrow$ un autovalore positivo e uno negativo. $\Rightarrow\left(1,0\right)$ è punto di sella.

$$Hg\left(-1,0\right)=\begin{pmatrix}0 & -2\\ -2 & 2\end{pmatrix}$$

$\rightarrow Det\left(Hg\left(-1,0\right)\right)=-4\Rightarrow$ un autovalore positivo e uno negativo. $\Rightarrow$ $\left(-1,0\right)$ è punto di sella.

Sviluppo di Taylor per f in $\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$:

$f\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)=\frac{7}{8}$

$\nabla f\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{3}{2},-\frac{3}{2}\right)$

$Hf\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

$f\left(x,y\right)=\frac{7}{8}+\frac{3}{2}\left(x-\frac{1}{2}\right)-\frac{3}{2}\left(y+\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}\left[\left(x-\frac{1}{2}\right)^{2}+\left(y+\frac{1}{2}\right)^{2}\right]+r_{f}$

$$\lim_{(x,y)\rightarrow\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{r_{f}}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^{2}+\left(y+\frac{1}{2}\right)^{2}}\right)=0$$

Sviluppo di Taylor per g in $\left(1,2\right)$:

$g\left(1,2\right)=4$

$\nabla g\left(1,2\right)=\left(4,4\right)$

$Hg\left(1,2\right)=\begin{pmatrix}4 & 2\\ 2 & 2\end{pmatrix}$

$g\left(x,y\right)=4+4\left(x-1\right)+4\left(y-2\right)+\frac{1}{2}\left[\left(\begin{pmatrix}4 & 2\\ 2 & 2\end{pmatrix}\left(x-1,y-2\right)\right)\left(x-1,y-2\right)\right]+r_{g}$

$$\lim_{(x,y)\rightarrow(1,2)}\left(\frac{r_{g}}{\left(x-1\right)^{2}+\left(y-2\right)^{2}}\right)=0$$

f è un polinomio in x e y di grado pari e i coefficienti di y^{4} e x^{4} sono negativi $\Rightarrow$ i punti di massimo $\left(1,1\right),\left(1,-1\right),\left(-1,1\right),\left(-1,-1\right)$ sono assoluti

$\Rightarrow sup\{f\} = 2$ e prendendo una restrizione della curva a una qualsiasi retta $y = mx + q$ si ha che $\lim_{x \to \infty} f(x) = -\infty \Rightarrow inf\{f\} = -\infty$.

Viceversa se si prende una restrizione di g ad una retta $y = k$:

- per $k > 0$ si avrà che $lim_{x \to \infty} g(x) = +\infty$ quindi $sup\{g\} = +\infty$;
- per $k < 0$ si avrà che $lim_{x \to \infty} g(x) = -\infty$ quindi $inf\{g\} = -\infty$.