**Esercizio 10**

1. Punto 1: $f : \mathbb{R} \in \mathbb{R}$ di classe $\mathcal{C}^2$ con due minimi relativi distinti. Dimostrare che $f$ presenta un punto di massimo relativo. Dove si trova rispetto ai minimi?

   *Dimostrazione.* Siano $x_1, x_2$ i punti di minimo relativi di $f$, suppongo per semplicità che $x_2 < x_2$. Considero $f : [x_1, x_2] \to \mathbb{R}$. poiché $f$ e continua e $[x_1, x_2]$ è compatto allora per Weierstrass ha massimo e minimo locale in $[x_1, x_2]$ e poiché $x_1, x_2$ sono punti di minimo relativo, il massimo sarà necessariamente in $]x_1, x_2[$. □

2. Punto 2:$f : \mathbb{R}^n \in \mathbb{R}$ di classe $\mathcal{C}^2$ con due minimi relativi distinti $x_1$ e $x_2$. Le ipotesi sono sufficienti a dire che $f$ ha necessariamente un altro punto critico distinto dai due minimi?

   *Dimostrazione.* Chiamo $v = x_2 - x_1$ e considero
   $$\frac{\partial f(x)}{\partial v}$$
   Io ho interpretato questa funzione come la derivata prima della funzione che si ottiene sezionando il grafico di $f$ in $\mathbb{R}^{n+1}$con piani perpendicolari a $\mathbb{R}^n$ di direzione $v$. Se considero il piano $\alpha$ che passa per $x_1$ questo passa anche per $x_2$ e la sezione che si ottiene su $\alpha$ dovrebbe essere un grafico di una funzione da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ e con derivata prima $\frac{\partial f(x)}{\partial v}$. Dalle ipotesi vale che
   $$\frac{\partial f(x_1)}{\partial v} = 0$$
   e
   $$\frac{\partial f(x_2)}{\partial v} = 0$$
   e $x_1$ e $x_2$ sono minimi, allora per il punto 1 esiste il massimo tra $x_1$ e $x_2$ e vale:
   $$\exists\ t \in ]0,1[\, : y = x_1 + t(x_2 - x_1)\ e\ \frac{\partial f(y)}{\partial v} = 0$$
   A questo punto però so che
   $$\frac{\partial f(x)}{\partial v} = \nabla f(y) \cdot v = 0$$
   e $v \neq 0$ poiché i minimi sono distinti. Quindi il prodotto scalare si annulla in due casi:

(a) $\nabla f(y) = 0$, cioè f ha un terzo punto stazionario diverso dai due minimi, $y$
(b) $\nabla f(y) \perp v$, che non credo mi implichi $\nabla f(y) = 0$

Quindi credo che le ipotesi non siano sufficienti ad affermare che $f$ abbia necessariamente un terzo punto critico, anche se non riesco a trovare un controesempio. $\square$