La soluzione del primo punto corretta, nulla da commentare. Passiamo al secondo punto. Il tuo ragionamento intuitivo di "sezionare" il grafico di f lungo la retta congiungente x_0 e x_1, i nostri minimi, si può formalizzare andando a considerare la funzione $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ così definita:

$$g(t) = f(x_0 + t(x_1 - x_0)) = f((1-t)x_0 + tx_1) \tag{1}$$

Si ha

$$\begin{aligned} g'(t) \quad &= \nabla f(x_0 + t(x_1 - x_0)) \cdot (x_1 - x_0) = & (2)\\ &= \|x_1 - x_0\| \partial_{(x_1 - x_0)} f(x_0 + t(x_1 - x_0)) & (3)\\ g''(t) \quad &= (x_1 - x_0)^t H f(x_0 + t(x_1 - x_0))(x_1 - x_0) & (4) \end{aligned}$$

Visto che in x_0 e in x_1 abbiamo dei minimi ne risulterà che $\nabla f(x_i) = \partial_v f(x_i) = 0$ per $i \in \{1, 2\}$ con hessiane definita positive. Ne segue che g ha dei minimi in corrispondenza di $t = 0$ e $t = 1$. Dunque esiste un punto di massimo per un certo $\bar{t} \in (0, 1)$ tale che

$$\partial_{(x_1 - x_0)} f(x_0 + \bar{t}(x_1 - x_0)) = 0 \tag{5}$$

Questo però, come hai giustamente osservato, non ci permette di concludere: avremmo bisogno di informazione sulle $(n - 1)$ direzioni mancanti a completare una base di $\mathbb{R}^n$.
Possiamo fare di peggio: prendiamo una curva $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}^n$ tale che $\gamma(0) = x_0$ e $\gamma(1) = x_1$, con γ di regolarità C^2. Riusciremo a trovare un punto $\bar{t}$ tra 0 e 1 tale che in $\gamma(\bar{t})$ si annulla la derivata di f nella direzione tangente a γ. Possiamo quindi produrre questa "nullità direzionale" un po' dove vogliamo, non necessariamente sul segmento congiungente i due punti di minimo. Ma non possiamo trarne nulla, perché ci mancano informazioni sulle altre direzioni.
Effettivamente non è possibile provare l'esistenza di un terzo punto critico per la funzione f: esistono esempi di funzioni in più variabili con solo due punti di minimo. Si può costruire esplicitamente, anche se risulta laborioso.
Il concetto chiave sta nel capire che il terzo punto critico, avendo più di un grado di libertà (a differenza del caso unidimensionale), può scappare in una delle direzioni libere e non essere mai raggiunto, se non al limite per $x \to +\infty$ lungo una qualche direzione.
Per chi è interessato avremo poi modo di parlarne più approfonditamente prima o dopo il prossimo tutoraggio e cercherò di portare un controesempio esplicito.