Esercizio 2

Cremasco, Flora, Petranovic

3 novembre 2016

Siano $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ e $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tali che:

$$f(\vec{x}) = \langle \vec{x}, A\vec{x} \rangle = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$$

Studiamo i punti critici:
attraverso lo studio di una matrice $B \in M_{3,3}(R)$ notiamo che possiamo scrivere $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ come:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^{n} x_j (a_{ij} + a_{ji})$$

E quindi:

$$\nabla f(\vec{x}) = \left(\sum_{j=1}^{n} x_j (a_{ij} + a_{ji}) \right)_{i=1,\dots,n}$$

Inoltre, notiamo che:

$$\nabla f(\vec{x}) = (A + A^T)\vec{x}$$

Quindi:

$$\nabla f(x) = 0 \Leftrightarrow (A + A^T)x = 0$$

Per concludere, $\vec{x}$ é un punto critico se appartiene al $Ker(A + A^T)$

Natura dei punti critici:
notiamo che $Hf(\vec{x}) = (A + A^T) \qquad \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n$

- A è definita positiva/negativa:
  Se A è definita positiva, lo è anche la sua trasposta A^T e ciò significa che:

$$(A\vec{x}) \bullet \vec{x} > 0 \qquad\qquad (A^T\vec{x}) \bullet \vec{x} > 0$$

$$(A\vec{x}) \bullet \vec{x} = 0 \Leftrightarrow \vec{x} = 0 \qquad\qquad (A^T\vec{x}) \bullet \vec{x} = 0 \Leftrightarrow \vec{x} = 0$$

Cosa accade ad $(A + A^T)$? Vediamo se anche lei è definita positiva. Verifichiamo che:

$$((A + A^T)\vec{x}) \bullet \vec{x} = (A\vec{x} + A^T\vec{x}) \bullet \vec{x} =$$
$$= A\vec{x} \bullet \vec{x} + A^T\vec{x} \bullet \vec{x} > 0$$

e che:
se $\vec{x} = 0 \Rightarrow ((A + A^T)\vec{x}) \bullet \vec{x} = 0$
(ovvio)
mentre se $((A + A^T)\vec{x}) \bullet \vec{x} = 0$

$$((A + A^T)\vec{x}) \bullet \vec{x} = 0$$
$$A\vec{x} \bullet \vec{x} + A^T\vec{x} \bullet \vec{x} = 0$$

Visto che i prodotti scalari sono definiti positivi, l'unico modo per cui la somma si annulli è che $\vec{x}$ sia nullo

Quindi se A e A^T sono definite positive, lo è anche $(A+A^T)$ (la matrice hessiana). I punti critici saranno quindi dei minimi.

Analogamente se A e A^T sono definite negative, lo è anche $(A + A^T)$. I punti critici saranno quindi dei massimi.

- A è semidefinita positiva/negativa:
  Se A è definita positiva, lo è anche la sua trasposta A^T e ciò significa che:

$$(A\vec{x}) \bullet \vec{x} > 0 \qquad (A^T\vec{x}) \bullet \vec{x} > 0$$

Ripetendo il ragionamento analogo a prima, otteniamo che $Hf(\vec{x})$ è semidefinita positiva/negativa e quindi non possiamo dire nulla sui punti critici.