

RANGHI di UNA MATRICE

A matrice $m \times n$

$R_1, R_2, \dots, R_m$ le righe di A; sono vettori in $\mathbb{R}^n$

$C_1, C_2, \dots, C_n$ le colonne di A; sono vettori in $\mathbb{R}^m$

$\text{Span}(R_1, \dots, R_m) \subset \mathbb{R}^n$ sottospazio vett.

$p_r \stackrel{\text{def}}{=} \dim(\text{Span}(R_1, \dots, R_m))$ è detto rango per righe di A della matrice

($p = \text{RHO}$)

Analogamente $\text{Span}(C_1, \dots, C_n)$ è sottospazio vett. di $\mathbb{R}^m$

la cui dimensione è detta rango per colonne di A: p_c

Naturalmente

$$p_r \leq n \quad p_c \leq m$$

ESEMPIO

$$A = \begin{vmatrix} 11 & 12 & 13 & 14 \\ 21 & 22 & 23 & 24 \\ 31 & 32 & 33 & 34 \\ 41 & 42 & 43 & 44 \end{vmatrix}$$

Notiziari: $\text{Span}\left(\begin{vmatrix} 11 \\ 21 \\ 31 \\ 41 \end{vmatrix}, \dots, \begin{vmatrix} 14 \\ 24 \\ 34 \\ 44 \end{vmatrix}\right) = \text{Span}\left(\underbrace{\begin{vmatrix} 11 \\ 21 \\ 31 \\ 41 \end{vmatrix}}_{\text{si può ancora "limare"}}, \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix}\right)$

$$p_c(A) = 2$$

$$\begin{vmatrix} 11 & 12 & 13 & 14 \\ 21 & 22 & 23 & 24 \\ 31 & 32 & 33 & 34 \\ 41 & 42 & 43 & 44 \end{vmatrix} \rightsquigarrow \begin{vmatrix} 11 & 12 & 13 & 14 \\ 10 & 10 & 10 & 10 \\ 20 & 20 & 20 & 20 \\ 30 & 30 & 30 & 30 \end{vmatrix} \rightsquigarrow \begin{vmatrix} 11 & 12 & 13 & 14 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad p_r(A) = 2$$

I due ranghi sono uguali. È un caso, oppure un fatto che vale per ogni matrice?

TEOREMA

Per una qualsiasi matrice $A_{m \times n}$ si ha $p_r(A) = p_c(A)$, e tale numero si chiama semplicemente rango di A: $p(A)$

Dim.

Consideriamo $L_A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ data da $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \xrightarrow{L_A} A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$
 L_A è appl. lineare.

Le colonne di A coincidono rispettivamente con

$$L_A(e_1), L_A(e_2), \dots, L_A(e_n) \quad e_1, \dots, e_n: \text{la base canonica di } \mathbb{R}^n$$

Dunque le colonne di A generano $\text{Im}(L_A)$. Pertanto:

$$(1) \quad p_r(A) = \dim(\text{Im}(L_A)) = n - \dim(\text{Ker}(L_A))$$

Definizione di dimensione di un'applicazione lineare

$$\text{Ker}(L_A) = \{u \in \mathbb{R}^n \mid L_A(u) = 0\} \quad u = \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} \quad L_A(u) = A \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^m$$

$$\underline{AU=0} \quad U = \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} \quad (U \text{ minuscola per aiutarci a pensarla come matrice})$$

quest'è un sistema lineare omogeneo

Lo risolveremo con l'algoritmo di eliminazione di Gauss. Quando facciamo le solite operazioni elementari sulle righe il sottospazio generato dalle righe della matrice non cambia. Quindi non cambia la sua dimensione, che è $p_r(A)$.

Quindi $\text{Ker}(L_A)$ coincide con il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ dato da tutte le soluzioni del S.L. omogeneo $AU=0$.

Con un po' di lavoro siamo riusciti a trasformare A in una matrice a gradini

$$A' = \left[\begin{array}{ccccccc} 1 * & \dots & * & 0 & * & \dots & * & 0 & * & \dots \\ & & & 1 & * & \dots & * & 0 & * & \dots \\ & & & & & & & 1 & * & \dots \\ \hline & & & & & & & & & 1 * & \dots * \\ & & & & & & & & & & 0 \end{array} \right]$$

$$p_r(A) = p_r(A') = \#(\text{pivot})$$

Le colonne di A' che non contengono pivot corrispondono alle indeterminate che sono parametri liberi.

$$\text{Esse sono in numero } n - \#(\text{pivot}) = n - p_r(A)$$

Per trovare una soluzione di $AU=0$ si danno ai parametri liberi valori arbitrari, e si trovano poi i valori delle rimanenti indeterminate mediante $A'U=0$, equi-

alente ord $AU=0$. Quindi, lo spazio delle soluzioni di $AU=0$ ha dimensione $n - \rho_r(A)$. Dunque $\dim(\text{Ker}(L_A)) = n - \rho_r(A)$. Infine

$$(1) \Rightarrow \rho_c(A) = n - \dim(\text{Ker}(L_A)) = n - (n - \rho_r(A)) = \rho_r(A)$$

Si può anche dire che: $\rho(A) = \rho({}^t A)$ ----

il rango di A è il massimo numero di righe di A lin. indipendenti.

Oppure

il rango di A è il max. numero di colonne di A lin. indipend.

~ ~ ~ ~ ~

" f^{-1} " questo simbolo si usa in matematica con due significati molto diversi, tutti e due utili.

① $f: A \rightarrow B$ sia un' ^{sin} applicazione biettiva, cioè è iniettiva e suriettiva. Allora, $\forall b \in B$ esiste $a \in A$ t.c. $f(a) = b$ (perché f è suriettiva), e tale a è unica (perché f è iniettiva). Allora, se associamo $b \mapsto a$ (possiamo fare quest' per ogni $b \in B$), abbiamo una nuova applicazione $B \rightarrow A$, detta appl. inversa di f , indicata con f^{-1} : $B \rightarrow A$. Propr. fondamentali di f^{-1} è

$$f \circ f^{-1} = \text{id}_B \quad f^{-1} \circ f = \text{id}_A$$

② $f: A \rightarrow B$ sia un' applicazione qualsiasi.
 $C \subset B$ un sottoinsieme qualsiasi. Allora

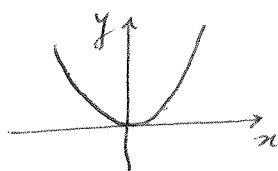
$f^{-1}(C)$ $\stackrel{\text{def}}{=} \{a \in A \mid f(a) \in C\}$ è detta controimmagine

$\cap$
 A dell' insieme C in rispetto ad f .

ESEMPIO

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

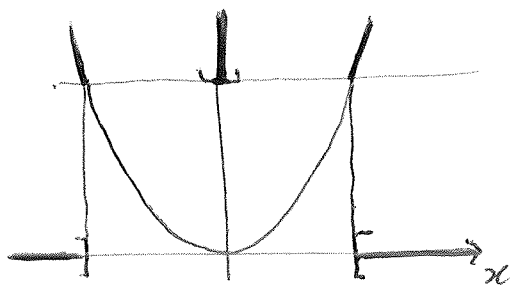
$$f(x) = x^2$$



25/10/16

(4)

$$C = [9, +\infty)$$



$$f^{-1}([9, +\infty)) =$$

$$= (-\infty, -3] \cup [3, +\infty)$$

$$C' = (-\infty, -1]$$

$$f^{-1}(C') = \emptyset$$

$$f(\mathbb{R}) = [0, +\infty)$$

$$C' \cap f(\mathbb{R}) = \emptyset$$

Vogliamo studiare un caso particolare di contraddizione.

$f: U \rightarrow V$ applicazione lineare.

$v_0 \in \text{Im}(f)$, cioè esiste $u_0 \in U$ tale che $f(u_0) = v_0$.

fissato. $f^{-1}(\{v_0\})$ sarebbe più corretto.

Vogliamo determinare $f^{-1}(v_0) = \{u \in U \mid f(u) = v_0\}$

$u_0 \in f^{-1}(v_0)$, dunque $f^{-1}(v_0) \neq \emptyset$.

Sia $u \in f^{-1}(v_0)$; allora $f(u) = v_0 = f(u_0) \Rightarrow$

$$0_v = f(u) - f(u_0) = f(u - u_0) \Rightarrow u - u_0 \in \text{Ker}(f)$$

(f è lineare)

$$u_0 + \text{Ker}(f) \stackrel{\text{def}}{=} \{u_0 + w \mid w \in \text{Ker}(f)\}$$

è SOLO un modo di scrivere

Allora il conticino fatto sopra mostra che

$$f^{-1}(v_0) \subset u_0 + \text{Ker}(f)$$

Vediamo se i due insiemi sono uguali.

Sia $w \in \text{Ker}(f)$ arbitrario. Allora

$$f(u_0 + w) = f(u_0) + f(w) = v_0 + 0_v = v_0 \Rightarrow u_0 + w \in f^{-1}(v_0)$$

Dunque

$$v_0 \in \text{Im}(f)$$

$$v_0 = f(u_0)$$

$$f^{-1}(v_0) = u_0 + \text{Ker}(f)$$

Caso particolare: $f = L_A: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ A matr. $m \times n$.

$B \in \mathbb{R}^m$ $B \in \text{Im}(L_A)$ equivale a dire che il SL

$AU = B$ è compatibile. In tal caso

$(L_A)^{-1}(B)$ è l'insieme di tutte le soluzioni del SL
(compatibile)

$$AU = B.$$

Sia $u_0 \in \mathbb{R}^n$ tale che $Au_0 = B$ è soddisfatto.

Si dice che u_0 è una soluzione particolare del SL
completo $AU = B$.

Scrivere un elemento "generico" di $\text{Ker}(L_A)$ lavorando
tutte le variabili libere in forma di parametri, ed
esprimendo le altre (quelle dei pivot) in funzione
di queste. Sembra complicato, ma è semplicissimo:

ESEMPIO (dettagli: nella Lezione 16)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\rho(A) = 2$$

Quindi, invece di risolvere il SL
omogeneo $AU = 0$ per trovare
 $\text{Ker}(L_A)$, che ha 3 equazioni

basta sceglierne 2 L.O.V. (L.O.V.P.). Per esempio

$$\begin{cases} u_1 + 2u_2 - u_3 = 0 \\ u_2 + u_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_1 - 3u_3 = 0 \\ u_2 + u_3 = 0 \end{cases}$$

c'è un solo param.
libero ($n - \rho(A) = 3 - 2$)

$$(3u_3, -u_3, u_3)$$

sol. generale di $AU = 0$ Scriveremo
anche questa in forma di matrice
colonna.

↑
↑
↑
parametri
SPLUG.

25/10/16

(6)

OMEGA maiuscolo

OMEGA minuscolo

$$\Omega = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_m \end{pmatrix}$$

TEOREMA di STRUTTURA per le soluzioni di $AX=B$

Se $AX=B$ è compatibile, allora la soluzione generale di tale SL è $U_0 + \Omega$

sol. PARTICOLARE
di $AX=B$

sol. GENERALE del SL. omogeneo
 $AX=0$, associato ad $\underbrace{AX=B}_{\text{SL COMPLETO}}$