Esercizi n.3

key words: derivate parziali, massimi e minimi liberi, formula di Taylor, funzioni implicite, teorema del Dini.

1) Sia $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^1 su Ω, sottoinsieme chiuso e limitato di $\mathbb{R}^n$.

(i) *(Rolle)* Supponiamo che $f(x)$ sia constantemente uguale a $c \in \mathbb{R}$ per ogni $x \in \partial\Omega$. Dimostrare che esiste almeno un punto critico per f all'interno di Ω, ossia esiste $x_0 \in \Omega\backslash\partial\Omega$ tale che $\nabla f(x_0) = 0$.

(ii) *(Lagrange)* Sia $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ un'applicazione lineare, $L(x) = Ax + b$ con $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ e $b \in \mathbb{R}^n$. Supponiamo $f(x) = L(x)$ per ogni $x \in \partial\Omega$. Dimostrare che esiste almeno un x_0 in $\Omega\backslash\partial\Omega$ tale che $\nabla f(x_0) = L(x_0)$.

2) *(Coercività)* Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^2. Supponiamo che

$$\lim_{\|x\| \to +\infty} f(x) = +\infty$$

Dimostrare che f ammette un punto di minimo globale, ossia esiste un punto x_0 tale che

$$\inf_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) = f(x_0)$$

3) Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^∞ con la seguente proprietà: se (x, y) è uno zero di f, cioè $f(x, y) = 0$, allora

(i) $\nabla f(x, y) = 0$;

(ii) $Hf(x, y)$ definita positiva.

Mostrare che f può avere solo zeri isolati, cioè per ogni $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ tale che $f(x_0, y_0) = 0$ esiste $\delta > 0$ per cui $f(x, y) \neq 0 \ \forall \ |(x, y) - (x_0, y_0)| < \delta$.
E' vero anche se f è una funzione di n variabili, anziché 2?
$(*)$ Dimostrare che si può ottenere la stessa tesi sostituendo all'ipotesi ii) la più debole:

(ii-w) $\det Hf(x, y) \neq 0$.

dove si intende sempre che tale proprietà è valida per i punti (x, y) che sono zeri di f.

4) Sia $\det : M_{n,n}(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{n^2} \to \mathbb{R}$ la funzione che associa ad una matrice A il suo determinante.

(i) Sia $B \in M_{n,n}(\mathbb{R})$. Sia I_n la matrice identità di dimensione n. Dimostrare che
$$(\partial_B \mathrm{det})\,(I_n) = \mathrm{Tr}(B)$$

(ii) Sia $B \in M_{n,n}(\mathbb{R})$. Sia A una matrice invertibile. Dimostrare che
$$(\partial_B \mathrm{det})\,(A) = \det(A)\mathrm{Tr}(A^{-1}B)$$

(iii) $(*)$ Siano A, $B \in M_{n,n}(\mathbb{R})$. Dimostrare che
$$(D\mathrm{det})\,(A) = (\mathrm{adj}(A))^T$$
dove $\mathrm{adj}(A)$ è la trasposta della matrice dei cofattori. Si ricordi che $A\,\mathrm{adj}(A) = \det(A)I_n$ da cui, se A invertibile, $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\mathrm{adj}(A)$.

5) Si verifichi che data
$$F(x,y) = y + y^4 + x^3\sqrt{x^2+1},$$
l'insieme $\Gamma = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, F(x,y) = 0\}$ intersecato con un opportuno intorno del punto $(0,0)$ è il grafico di una funzione $x \mapsto f(x)$. Si mostri che 0 è punto stazionario per f e se ne determini la natura.

6) Si verifichi che data
$$F(x,y) = e^{\frac{x^2y}{2}} - \log(\frac{2x}{y}),$$
l'insieme $\Gamma = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, F(x,y) = e\}$ intersecato con un opportuno intorno del punto $(1,2)$ è il grafico di una funzione $x \mapsto f(x)$ e anche di una $y \mapsto g(y)$. Si calcolino $f'(1)$ e $g'(2)$.

7) Si scriva l'equazione della retta tangente al grafico della funzione definita implicitamente dall'equazione
$$y\cos(xy) + (1-y^2)(e^x - 1) = 0$$
in un intorno del punto $(0,0)$.

8) Sia $f(x) = e^x + x^2$. Si provi che esiste un intorno del punto 0 in cui f è invertibile. Detta ϕ l'inversa di f, si scriva la formula di Taylor di ϕ fino all'ordine 2 relativamente al punto $y_0 = 1$.

9) Sia
$$\Gamma = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 3x^2 + 2xy + y^2 = 6\}.$$

- Si provi che Γ è limitato.

- Si determinino i punti di Γ nei pressi dei quali Γ è grafico di una funzione (della x o della y).
- Si determinino i punti di Γ in cui sia massima o minima una delle coordinate.
- Osservato che $(1,1)$ è un punto di Γ, si determini la retta tangente a Γ in tale punto.

10) Sia $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione così definita:

$$g(x,y) := xye^x + ye^y - e^x + 1$$

e sia C l'insieme degli zeri di g, cioè

$$C := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid g(x,y) = 0\}$$

Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ una funzione di classe C^2 in un intorno del punto $(0,0)$ tale che

$$\nabla f(0,0) = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad Hf(0,0) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Stabilire se $(0,0)$ è un punto di minimo locale per f ristretta all'insieme C.

11) Sia $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tale che:

(i) $g \in C^2(\mathbb{R}^2)$ e $\partial_y g(x,y) > 0$ per ogni $(x,y) \in \mathbb{R}^2$;

(ii) $\lim_{y \to +\infty} g(x,y) = +\infty$ e $\lim_{y \to -\infty} g(x,y) = -\infty$ per ogni $x \in \mathbb{R}^2$.

Dimostrare che esiste una ed una sola $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che $g(x, f(x)) = 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.
Dimostare inoltre che se $g \in C^k$ allora $f \in C^k$ per ogni $k \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$.