ESERCIZIO (esame 14/9/16)

$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ lineare data da $f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} x-y \\ x+2y+z \end{vmatrix}$

Si determini il rango, una base dell'immagine ed una base del nucleo di $f$.

$\mathcal{B}_c = (e_1, e_2, e_3)$ $\quad \mathcal{B}'_c = (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ le basi canoniche ordinate di $\mathbb{R}^3$ ed $\mathbb{R}^2$ rispett.

$f(e_1) = \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \end{vmatrix}$ $\quad f(e_2) = \begin{vmatrix} -1 \\ 2 \end{vmatrix}$ $\quad f(e_3) = \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix}$

$\mathrm{Span}\left(\begin{vmatrix} 1 \\ 1 \end{vmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \mathbb{R}^2 \implies \underline{\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^2} \implies \dim(\mathrm{Ker}(f)) = 3 - 2 = 1$

La matrice che rappresenta $f$ rispetto alle basi canoniche è

$$A = \begin{array}{ccc|l} 1 & -1 & 0 & \varepsilon_1 \\ 1 & 2 & 1 & \varepsilon_2 \\ f(e_1) & f(e_2) & f(e_3) & \end{array} \qquad rg(A) = 2 \qquad A = M^{\mathcal{B}_c}_{\mathcal{B}'_c}(f)$$

$\mathrm{Ker}(f) = ?$ $\quad \begin{cases} x - y = 0 \\ x + 2y + z = 0 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x = y \\ 3x + z = 0 \end{cases}$ $\quad (x, x, -3x)$ è la sol. generale

Post $x = 1$ $\quad \mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Span}\left(\begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{vmatrix}\right)$

---

$$\mathcal{B} = \left( \overset{u_1}{\begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix}}, \overset{u_2}{\begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix}}, \overset{u_3}{\begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}} \right)$$ base ord. di $\mathbb{R}^3$ $\qquad \mathcal{E} = \left( \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix} \right)$ base ord. di $\mathbb{R}^2$

Si determini la matrice $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}}(f)$

$$\begin{tikzcd} \mathcal{B}_c \ \mathbb{R}^3 \arrow[r, "f"] & \mathbb{R}^2 \ \mathcal{B}'_c \arrow[d, "id_{\mathbb{R}^2}"] \\ \mathcal{B} \ \mathbb{R}^3 \arrow[u, "id_{\mathbb{R}^3}"] & \mathbb{R}^2 \ \mathcal{E} \end{tikzcd}$$

$id_{\mathbb{R}^2} \circ f \circ id_{\mathbb{R}^3} = f$

la conosco

$$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}}(f) = \underbrace{M^{\mathcal{B}'_c}_{\mathcal{E}}(id_{\mathbb{R}^2})}\, \overbrace{M^{\mathcal{B}_c}_{\mathcal{B}'_c}(f)}\, \underbrace{M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}_c}(id_{\mathbb{R}^3})}$$

matrici di cambiamento di base

$$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}_c}(id_{\mathbb{R}^3}) = \begin{array}{cccc} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} & \begin{matrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} \underset{\overset{\shortparallel}{u_1}}{id(u_1)} & u_2 & u_3 \end{matrix} & \end{array}$$

$$M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}'_c}(id_{\mathbb{R}^2}) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{matrix}$$

$M^{\mathcal{B}'_c}_{\mathcal{C}}(id_{\mathbb{R}^2})$ sarà la sua matrice inversa

$$\left|\begin{matrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{matrix}\right|\left.\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}\right| \rightsquigarrow \left|\begin{matrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{matrix}\right|\left.\begin{matrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{matrix}\right| \rightsquigarrow \left|\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{matrix}\right|\left.\begin{matrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{matrix}\right| \rightsquigarrow \left|\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}\right|\left.\begin{matrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{matrix}\right|$$

<u>Controllo</u>:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{OK} \qquad M^{\mathcal{B}'_c}_{\mathcal{C}}(id_{\mathbb{R}^2}) = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$$

Infine

$$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(f) = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 1 \\ -4 & -3 & 0 \end{vmatrix}$$

Quali sono le componenti di $\begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{vmatrix}$ rispetto alla base $\mathcal{B}$?

$$v = \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{vmatrix} = \lambda_1 \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix} + \lambda_2 \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix} + \lambda_3 \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \\ \lambda_1 + \lambda_2 \\ \lambda_1 \end{vmatrix} \qquad \lambda_1 = -3 \quad \lambda_2 = 4 \quad \lambda_3 = 0$$

Vogliamo un modo più "industrial" per trovarle:

$$\left|\begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{matrix}\right|\left.\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}\right| \rightsquigarrow \left|\begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{matrix}\right|\left.\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{matrix}\right| \rightsquigarrow \left|\begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{matrix}\right|\left.\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{matrix}\right| \rightsquigarrow$$

$$\left|\begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}\right|\left.\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{matrix}\right| \rightarrow \left|\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}\right|\left.\begin{matrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{matrix}\right| \rightarrow \left| I_3 \right|\left.\begin{matrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{matrix}\right|$$

<u>Controllo</u>

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{OK} \qquad M^{\mathcal{B}_c}_{\mathcal{B}} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} \overbrace{\begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{vmatrix}}^{\text{coord. di } w \text{ risp. } \mathcal{B}_0} = \underbrace{\begin{vmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \end{vmatrix}}_{\text{coord. di } w \text{ risp. alla base } \mathcal{B}}$$

faccio un po' di fatica per calcolarmi questa matrice, ma poi sto un attimo a trovare le coord. di un qualsiasi vettore risp. alla base $\mathcal{B}$

espresso nella base canonica

---

ESERCIZIO Costruire un'applicazione lineare $f: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ il cui nucleo sia generato dai vettori

$$w_1 = \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{vmatrix} \qquad w_2 = \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix}$$

$w_1, w_2$ sono LIN. INDIP. Li completiamo ad una base di $\mathbb{R}^4$ $w_1, w_2, e_3, e_4$

$\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 2 \Rightarrow \dim(\mathrm{Im}(f)) = 4 - 2 = 2$

Quindi $f(e_3), f(e_4)$ (che generano $\mathrm{Im}(f)$) dovranno essere linearmente indipendenti. Per esempio (SPIEG....) una $f$ che soddisfa le condizioni del PBL è

$$f(w_1) = 0_{\mathbb{R}^3} = f(w_2) \qquad f(e_3) = \begin{vmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{vmatrix} \qquad f(e_4) = \begin{vmatrix} 3 \\ 0 \\ -16 \end{vmatrix}$$

ESERCIZIO

Esistono applicazioni lineari $f: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tali che

$$\underbrace{\begin{vmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{vmatrix}}_{u_1} \xrightarrow{f} \begin{vmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix} \qquad \underbrace{\begin{vmatrix} 0 \\ -15 \\ 1 \\ 14 \end{vmatrix}}_{u_2} \xrightarrow{f} \begin{vmatrix} 15 \\ 4 \\ -3 \\ 1 \end{vmatrix} \qquad \underbrace{\begin{vmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \\ -5 \end{vmatrix}}_{u_3} \xrightarrow{f} \begin{vmatrix} 6 \\ 6 \\ 6 \\ -6 \end{vmatrix} \quad ?$$

Se $u_1, u_2, u_3$ sono LIN. INDIP., allora sicuramente SI per il

Teorema di determinazione di un' appl. lineare.

$u_1, u_3$ sono certamente LIN. INDIP. SPIEGARE. Allora

$u_1, u_2, u_3$ saranno LIN. INDIP. $\Leftrightarrow u_2 \notin \text{Span}(u_1, u_3)$

$$\begin{vmatrix} 0 \\ -15 \\ 1 \\ 14 \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{vmatrix} + b \begin{vmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \\ -5 \end{vmatrix} \quad a, b \in \mathbb{R} \qquad a = 1 \text{ necessariamente}$$

$$\begin{vmatrix} 0 \\ -15 \\ 1 \\ 14 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 \\ -15 \\ 0 \\ 15 \end{vmatrix} = b \begin{vmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \\ -5 \end{vmatrix}. \qquad \text{OK se } b = -3$$

Riassumendo:

$\boxed{u_2 = u_1 - 3u_3}$

Questo implicherebbe

$$\begin{vmatrix} 15 \\ 4 \\ -3 \\ 1 \end{vmatrix} = f(u_2) = f(u_1 - 3u_3) = f(u_1) - 3f(u_3) = \begin{vmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 6 \\ 6 \\ 6 \\ -6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -15 \\ -16 \\ -17 \\ 18 \end{vmatrix}$$

Quindi NON esiste una $f: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ lineare, che soddisfa le condizioni richieste.

ESERCIZIO

Considerata la matrice $A = \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$, esiste una matrice B tale che $\underset{x \times y}{B} \underset{3\times 2}{A} = \underset{2\times 2}{I_2} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$?

B è necessariamente una matrice $2\times 3$, quindi ha 6 entrate $B = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{vmatrix}$. Se si fa il prodotto righe per colonne BA, e lo si eguaglia ad $I_2$ si ottiene un SL di 4 equazioni in 6 incognite ....

Forse è meglio tentare di ragionare in modo diverso.

$A \rightsquigarrow L_A : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ chiamiamola pure f.

26/10/16

$B \rightsquigarrow L_B = g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \qquad BA = I_2 \iff g \circ f = id_{\mathbb{R}^2}$

$\mathcal{B}'_c = (\varepsilon_1, \varepsilon_2) \qquad \mathcal{B}_c = (e_1, e_2, e_3)$ le basi canoniche

$f(\varepsilon_1) = \begin{vmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}$ (è la prima colonna di A) $f(\varepsilon_2) = \begin{vmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix}$ sono LIN. INDIP.

Completo $\overset{= v_2}{f(\varepsilon_1)}, \overset{= v_3}{f(\varepsilon_2)}$ ad una base di $\mathbb{R}^3$ : $e_1, v_2, v_3$

L'applicazione lineare g la trovo subito grazie al Teor. di determinazione di un'applicazione lineare:

$g(e_1) =$ quel che voglio, per esempio: $0_{\mathbb{R}^2}$

$g(v_2) = \varepsilon_1 \qquad g(v_3) = \varepsilon_2$

A questo punto, se g esiste, allora esiste sicuramente $M^{\mathcal{B}_c}_{\mathcal{B}'_c}(g)$ e questa è la B cercata.

Determiniamola esplicitamente:

| | | |
|---|---|---|
| 1 | 5 | 4 |
| 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 |
| $e_1$ | $v_2$ | $v_3$ |

$e_3 = v_2 - 5e_1$

$e_2 = v_3 - 4e_1 - e_3 = v_3 - 4e_1 - v_2 + 5e_1 = e_1 - v_2 + v_3$

Allora:

$$g(e_2) = g(e_1 - v_2 + v_3) = g(e_1) - g(v_2) + g(v_3) = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 \\ 1 \end{vmatrix}$$

$$g(e_3) = g(-5e_1 + v_2) = -5g(e_1) + g(v_2) = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix}$$

Pertanto

$$B = M^{\mathcal{B}_c}_{\mathcal{B}'_c}(g) = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

Controllo:

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{OK}$$

$BA = I_2 \qquad AB = ?$

Sicuramente ~~sum~~ $AB \neq I_3$. Infatti, altrimenti $\mathbb{R}^2 \underset{L_B}{\overset{L_A}{\rightleftarrows}} \mathbb{R}^3$
sarebbero isomorfismi uno l'inverso dell'altro.
Ne seguirebbe:

$$2 = \dim(\mathbb{R}^2) = \dim(\mathbb{R}^3) = 3 \quad \text{assurdo.}$$

cmq:

$$AB = \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

---

ESERCIZIO $\quad A$ matrice $m \times n \qquad rg(A) \leq 1 \iff A = \overset{m\times 1}{B}\,\overset{1\times n}{C}$

$rg(A) = 0 \iff A = 0$ matrice $m \times n$ nulla

Prendo $B = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{vmatrix}$ e $C = |c_1 \; \ldots \; c_n|$ qualsiasi $BC = 0 = A$

$rg(A) = 1 \qquad L_A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m \qquad \dim(\mathrm{Im}(L_A)) = rg(A) = 1$

Sia $v \in \mathrm{Im}(L_A) \quad v \neq 0 \Rightarrow v$ è base di $\mathrm{Im}(L_A) \simeq \mathbb{R}$

$v \in \mathbb{R}^m$ in realtà, perché $\mathrm{Im}(L_A) \subset \mathbb{R}^m$.
Come $v$ si può prendere una qualsiasi colonna non nulla di $A$.

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^n \arrow[r, "``L_A\text{''}"] \arrow[rr, bend left, "L_A"] & \mathrm{Im}(L_A) \simeq \mathbb{R} \arrow[r, hook, "i"] & \mathbb{R}^m \\ \mathcal{B}_c & \mathcal{C} = \{v\} & \mathcal{B}'_c \end{tikzcd}$$

$$C = M^{\mathcal{B}_c}_{\mathcal{C}}(``L_A\text{''}) \qquad B = M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}'_c}(i)$$

inclusione

$$BC = M^{\mathcal{B}_c}_{\mathcal{B}'_c}(L_A) = A$$

# L'angolo di $\mathbb{C}$

26/10/16 

$f(x) \in \mathbb{R}[x]$ polinomio $\quad f = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n$

$a_h \in \mathbb{R} \ \forall h \quad a_0 \neq 0 \implies \partial f = n$. Supporremo $n \geq 1$.

TFA $\implies$ esiste $\alpha \in \mathbb{C}$ $(\mathbb{R} \subset \mathbb{C})$ tale che $f(\alpha) = 0$, cioè

$a_0 \alpha^n + a_1 \alpha^{n-1} + \ldots + a_n = 0$

$$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \qquad z \longmapsto \bar{z}$$
$$\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2 \qquad \overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$$
$$z \in \mathbb{R} \iff z = \bar{z}$$

$\overline{a_0 \alpha^n + a_1 \alpha^{n-1} + \ldots + a_n} = \bar{0} = 0$

$\bar{a}_0 \bar{\alpha}^n + \bar{a}_1 \bar{\alpha}^{n-1} + \ldots + \bar{a}_n = 0$

$a_0 \bar{\alpha}^n + a_1 \bar{\alpha}^{n-1} + \ldots + a_n = 0$ cioè $\underline{f(\bar{\alpha}) = 0}$

$(x - \alpha)(x - \bar{\alpha}) = x^2 - (\alpha + \bar{\alpha})x + \alpha\bar{\alpha} = p(x)$

$\alpha = a + ib \quad \bar{\alpha} = a - ib \quad \alpha + \bar{\alpha} = 2a \in \mathbb{R}$ $\quad$ SPIEG

$\alpha\bar{\alpha} = a^2 - (-b^2) = a^2 + b^2 = |\alpha|^2 \in \mathbb{R}$ $\quad$ dunque $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ ✓

$b \neq 0$ (supponiamo) $\quad x^2 - 2ax + a^2 + b^2 = 0 \quad (*)$

$\Delta = 4a^2 - 4(a^2 + b^2) = -4b^2 < 0$, dunque $(*)$ non ha radici reali (lo sapevamo già).

dividi $f(x)$ per $p(x)$ $\quad$ SPIEGARE

$f(x) = q(x) \cdot p(x) + r(x)$ dove $r(x) = 0$ oppure

$\partial r(x) < 2$ cioè $r(x) = cx + d$

$c, d \in \mathbb{R}$

Supponiamo $r(x) \neq 0$. Allora

$0 = f(\alpha) = q(\alpha)\underbrace{(\overbrace{\alpha - \alpha}^{=0})(\alpha - \bar{\alpha})}_{p(\alpha)} + r(\alpha) \implies r(\alpha) = c\alpha + d = 0$

Se $c = 0$, allora $d = 0$ assurdo. Dunque $c \neq 0$ e $\alpha = -\frac{d}{c}$

ma $-\frac{d}{c} \in \mathbb{R} \implies b = 0$ assurdo. Allora $r(x) = 0$