Esercizi n.4

key words: Minimi e massimi liberi e vincolati. Vincolo in forma implicita ed esplicita. Teorema dei moltiplicatori di Lagrange.

1) Si consideri la funzione $f(x, y) = y^2 + x^2y - y$. Si determinino il minimo e il massimo assoluti della funzione f ristretta al disco unitario

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

2) Si consideri la funzione $f(x, y, z) = xy + xz + y^2$.

i) Si trovino i punti stazionari e si decida se sono massimi, minimi o di sella.

ii) Si determinino gli estremi di f sull'insieme

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x + y + z = 1,\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0\}.$$

3) Si consideri la funzione $f(x, y) = 3x^2 + 4y^2 - 6x - 12$. Si determinino il minimo e il massimo assoluti della funzione f ristretta all'insieme

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2 + y^2 - 4 \leq 0\}.$$

4) Si consideri la funzione $f(x, y) = e^{xy}$. Si determinino il minimo e il massimo assoluti della funzione f ristretta all'insieme

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2 - 1 \leq y \leq 3\}.$$

5) Si consideri la funzione $f(x, y, z) = z^2e^{xy}$. Si determinino il minimo e il massimo assoluti della funzione f ristretta all'insieme

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}.$$

6) Si consideri la funzione $f(x, y, z) = x^2 + \cos y$. Si determinino il minimo e il massimo assoluti della funzione f ristretta all'insieme

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2 + y^2 + e^{z^2} = 10\}.$$

7) Si consideri la funzione $f(x, y, z) = \dfrac{y^2 - z^2}{1 + x^2}$. Si determinino il minimo e il massimo assoluti della funzione f ristretta all'insieme

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2 + y^2 + z^2 \leq 9\}.$$

8) Siano $y_1, \dots, y_m$ punti di $\mathbb{R}^n$. Consideriamo la funzione $f(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ così definita

$$f(x) = \sum_{i=1}^{m} \|x - y_i\|^2 = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} (x_j - y_{i,j})^2$$

Determinare il minimo assoluto di f ristretta all'iperpiano

$$\Lambda_{v_0} := \{x \in \mathbb{R}^n \mid x \cdot v_0 = 0\}$$

dove v_0 è un vettore fissato di $\mathbb{R}^n$. Qual è l'interpretazione geometrica del punto trovato? Confrontare il risultato con il corrispondente esercizio del foglio numero 2.