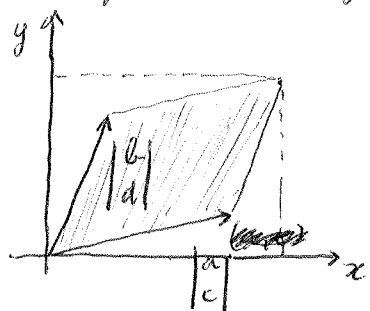


n inter fissate; M_n insieme delle matrici $n \times n$ (quadrato)
 Vogliamo associare ad ogni matrice A $n \times n$ un numero
 reale il DETERMINANTE di A $\det(A) \in \mathbb{R}$ che rifletta certe
 proprietà di A .

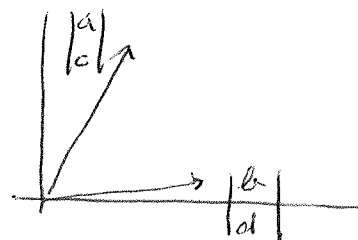
$n=1$ $A = |a| \mapsto \det(A) = a$

$n=2$ $A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \mapsto ad - bc$ (lo abbiamo già incontrato)

Ma qualche significato? $\Leftrightarrow$ l'area del parallelogramma qui
 tratteggiato (verifica: a loro, dare aiuti)



PBL: che cosa succede
 se si ha la situazione
 qui a lato?



Due vettori colonna sono L.W.D.P. $\Leftrightarrow$

il parallelogramma che ha per lati i vettori si riduce ad un segmento
 $\Leftrightarrow$ l'area di tale parallelogramma è 0

$n=3$? (Il determinante è sempre "complicato" ...)

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

A_{ij} : matrice $(n-1) \times (n-1)$ ottenuta a partire
 da A sopprimendo l' i -esima riga e la
 j -esima colonna. Si dice che
 A_{ij} è un MINORE di A .

$$\det(A) \stackrel{\text{def}}{=} a_{11} \det \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \det \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \det \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \quad (1)$$

questi li sappiamo calcolare: è il caso $n=2$.

Osservazione $ad - bc = a \det(|d|) - c \det(|b|)$ Quindi una
 regola analoga alla (1) ($n=3$) funziona anche nel caso $n=2$.

Notare la posizione di "a", sopra la diagonale [3/1/10/16]

(3)

c) Lo stesso ragionamento fatto per I_n mostra che ($a \in \mathbb{R}$)

$$\det \begin{vmatrix} 1 & & a \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{vmatrix} = 1$$

matrici elementari $n \times n$

[n=2]

$$\det \begin{vmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 - a \cdot 0 = 1$$

Supponiamo il risultato vero per

[n-1]

$$\det \begin{vmatrix} 1 & & a \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \underbrace{\det(A_{11})}_{=?} - 0 \cdot \underbrace{\det(A_{21}) + 0 \cdot \det(A_{31}) + \dots + 0 \det(A_{n1})}_{=0}$$

Per calcolare $\det(A_{11})$ si hanno due casi:

(I°)

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & a \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{vmatrix}$$

I_{n-1}

Se a compare nella 1° riga di A, allora

$$A_{11} = I_{n-1} \text{ e quindi } \det(A_{11}) = \det(I_{n-1}) = 1$$

II° caso

$$A = \begin{vmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & a \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{vmatrix}$$

Se a compare in una delle righe successive, allora

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & a \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{vmatrix} \text{ cioè } A_{11} \text{ è una matrice elementare } (n-1) \times (n-1),$$

dello stesso tipo di A $\Rightarrow$ scatta l'ip. induttiva, e si ha $\det(A_{11}) = 1$

d) || Se A ha una riga nulla (o una colonna nulla), allora $\det(A) = 0$

Lo dimostreremo per induzione su n. $n=1$ è banale.

[n=2]

$$\det \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ c & d \end{vmatrix} = 0 \cdot d - 0 \cdot c = 0 \quad \det \begin{vmatrix} 0 & b \\ 0 & d \end{vmatrix} = 0 \cdot d - b \cdot 0 = 0$$

(le altre due possibilità sono uguali)

[n > 2]

$$A = \begin{vmatrix} & & & \\ & & & \\ & & & \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix}$$

i-esima riga

$$\det(A) = \overbrace{a_{11} \det(A_{11})}^{=0} - \overbrace{a_{21} \det(A_{21})}^{=0} + \dots + \overbrace{a_{i1} \det(A_{i1})}^{=0} + \dots$$

Per ogni $h \neq i$ si ha che A_{hi} è una matrice $(n-1) \times (n-1)$ con una riga tutta nulla. Per l'ipotesi induttiva si ha, quindi: $\det(A_{hi}) = 0$.

Per $h=i$ si ha, invece: $a_{ii} = 0$.

ESERCIZIO (a loro) Dimostrare che se A ha una colonna tutta nulla, allora $\det(A) = 0$

ESERCIZIO Verificare le seguenti uguaglianze:

$$\det \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3+5 & 4+6 & 2+3 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \det \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 4 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} + \det \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 5 & 6 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\det \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 7 \cdot 2 & 7 \cdot 3 & 7 \cdot 5 \\ 8 & 6 & -3 \end{vmatrix} = 7 \cdot \det \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 5 \\ 8 & 6 & -3 \end{vmatrix}$$

Queste proprietà valgono in generale, e vengono formalizzate così:

II La funzione $\det$ è lineare rispetto a ciascuna riga della matrice A . Cioè, immancabilmente A viene pensata formata da n vettori

$$\begin{aligned} \rightarrow \det \begin{vmatrix} -R+S & \dots \end{vmatrix} &= \det \begin{vmatrix} -R & \dots \end{vmatrix} + \det \begin{vmatrix} -S & \dots \end{vmatrix} \\ \det \begin{vmatrix} -\lambda R & \dots \end{vmatrix} &= \lambda \cdot \det \begin{vmatrix} -R & \dots \end{vmatrix} \quad \lambda \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Riga:
 $A = \begin{bmatrix} R_1 \\ \vdots \\ R_n \end{bmatrix}$

qui R, S sono entrambi vettori riga. Le altre righe in tali relazioni restano inalterate dappertutto.

La linearità permette di operare su una riga alla volta, mentre le altre righe restano inalterate.

Verifichiamo (per induzione su n , naturalmente) la seconda di tali proprietà. I casi $n=1$ e $n=2$ si verificano direttamente, senza fatica.

Se $n > 2$, sia l' i -esima riga della forma λR . Allora

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & & \\ \lambda b_{i1} & \lambda b_{i2} & \dots & \lambda b_{in} \\ & & & \\ a_{m1} & & & \end{vmatrix} \quad i\text{-esima riga}$$

Per ogni $h \neq i$ il minore A_{hi} è $(n-1) \times (n-1)$ ed ha una riga del tipo λR .

Per $h=i$ ha $a_{ii} = \lambda b_{ii}$. Quindi:

$$\det(A) = a_{11} \det(A_{11}) - \dots + (-1)^{i+1} \lambda b_{ii} \det(A_{ii}) \pm \dots =$$

$$\begin{aligned} A' = \begin{vmatrix} A_1 \\ \vdots \\ B \\ \vdots \\ A_n \end{vmatrix} &= a_{11} \lambda \det(A'_{11}) - a_{21} \lambda \det(A'_{21}) + \dots + (-1)^{i+1} \lambda b_{ii} \det(A'_{ii}) \pm \dots \\ &= \lambda (a_{11} \det(A'_{11}) - \dots + (-1)^{i+1} b_{ii} \det(A'_{ii}) \pm \dots) = \underline{\underline{\lambda \cdot \det(A')}} \end{aligned}$$

Prime conseguenze di II:

⊙ Un'altra dimostrazione che, se A ha una riga nulla, allora $\det(A) = 0$

il primo "0" gioca il ruolo di λ

$$A = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix} \quad \det(A) = \det \begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \cdot \det \begin{vmatrix} 0 & \dots & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$(*) \quad \det \begin{vmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & c & \\ & & & \ddots \\ & & & & 1 \end{vmatrix} = \det \begin{vmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & c \cdot 1 & \\ & & & \ddots \\ & & & & 1 \end{vmatrix} = c \cdot \det \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & \ddots \\ & & & & 1 \end{vmatrix}}_{I_n} = c \cdot 1 = \underline{\underline{c}}$$

$c \neq 0$ matrice elementare

III Se due righe adiacenti (= "una dopo l'altra") di una matrice A sono uguali, allora $\det(A) = 0$.

Dim Per induzione su n

$[n=2]$ ($n=1$ non ha senso) $\det \begin{vmatrix} a & b \\ a & b \end{vmatrix} = ab - ab = 0$ OK

Sia $n > 2$ e supp. vera la proprietà per $n-1$.

$$\begin{array}{c|c} j & \text{---} R_j \text{---} \\ j+1 & \text{---} R_{j+1} \text{---} \end{array} \quad \left| \begin{array}{c} R_j \\ R_{j+1} \end{array} \right|$$

$$R_j = R_{j+1} \Rightarrow a_{j,i} = a_{j+1,i} \quad \text{e} \quad A_{j,i} = A_{j+1,i}$$

Se $i \neq j$ e $i \neq j+1$ allora A_{ii} è una matrice $(n-1) \times (n-1)$ con due righe uguali $\Rightarrow \det(A_{ii}) = 0$

Allora:

$$\det(A) = \pm \underbrace{a_{j,i}}_{\text{SPIEG.}} \underbrace{\det(A_{j,i})}_{=0} + \underbrace{a_{j+1,i}}_{=0} \underbrace{\det(A_{j+1,i})}_{=0} = 0 \quad \text{per i segni.}$$

PROPOSIZIONE

Se la matrice $n \times n$ A' è stata ottenuta da A scambiando tra loro due righe ~~qualsiasi~~, allora $\det(A') = -\det(A)$.

Dim. 1° CASO Supponi che le due righe scambiate siano ADIACENTI

$$A = \begin{array}{c|c} \text{---} R \text{---} & j \\ \text{---} S \text{---} & j+1 \end{array} \quad B \stackrel{\text{def}}{=} \begin{array}{c|c} \text{---} R+S \text{---} & j \\ \text{---} R+S \text{---} & j+1 \end{array}$$

B è una nuova matrice $n \times n$. Le altre righe sono uguali a quelle di A .

$$\begin{aligned} 0 \stackrel{\text{II}}{=} \det(B) &= \det \begin{array}{c|c} \text{---} R \text{---} & j \\ \text{---} R+S \text{---} & j+1 \end{array} + \det \begin{array}{c|c} \text{---} S \text{---} & j \\ \text{---} R+S \text{---} & j+1 \end{array} = \\ &\quad \uparrow \text{ lavoro sulla riga } j\text{-esima} \quad \uparrow \text{ lavoro sulle righe } (j+1)\text{-esima di } \\ &= \det \begin{array}{c|c} \text{---} R \text{---} & j \\ \text{---} R \text{---} & j+1 \end{array} + \det \begin{array}{c|c} \text{---} R \text{---} & j \\ \text{---} S \text{---} & j+1 \end{array} + \det \begin{array}{c|c} \text{---} S \text{---} & j \\ \text{---} R \text{---} & j+1 \end{array} + \det \begin{array}{c|c} \text{---} S \text{---} & j \\ \text{---} S \text{---} & j+1 \end{array} \\ &\quad \underbrace{= 0 \text{ per III}} \quad \underbrace{A} \quad \underbrace{A'} \quad \underbrace{= 0 \text{ per III}} \end{aligned}$$

(entrambe le matrici)

~~PROPOSIZIONE~~ CASO GENERALE Sono state scambiate le righe R_i, R_j $h \stackrel{\text{def}}{=} j-i$ ($i < j$)

$$\begin{array}{c|c} i & \text{---} R_i \text{---} \\ j & \text{---} R_j \text{---} \end{array} \quad \left. \vphantom{\begin{array}{c|c} i & \text{---} R_i \text{---} \\ j & \text{---} R_j \text{---} \end{array}} \right\} h$$

A

dopo h scambi di righe consecutive

$$\begin{array}{c|c} i & \text{---} R_{i+1} \text{---} \\ j-1 & \text{---} R_j \text{---} \\ j & \text{---} R_i \text{---} \end{array}$$

$$\det = (-1)^h \det(A)$$

Adesso devo far risalire R_j , che è in posizione $j-1$, fino alla i -esima posizione. Servono $(j-1) - i = h-1$ "salti"

Infine:

$$\det(A') = \det \begin{array}{c|c} \text{---} R_j \text{---} \\ \text{---} R_i \text{---} \end{array} = (-1)^{h+h-1} \det \begin{array}{c|c} \text{---} R_i \text{---} \\ \text{---} R_j \text{---} \end{array} = (-1)^{\text{DISPARI! } 2h-1} \det(A) = -\det(A)$$

COROLLARIO
PROPOSIZIONE

Se una matrice $n \times n$ A ha due qualsiasi righe uguali, allora $\det(A) = 0$.

$$A = \begin{vmatrix} \vdots & -R \\ \vdots & -R \end{vmatrix} \leftarrow \text{DISTANZIA!}$$

Dim. Scambiando tra di loro le due righe in questione, la matrice resta la stessa. Allora, per la Proposizione precedente si ha

$$\det(A) = -\det(A) \Rightarrow 2\det(A) = 0 \Rightarrow \det(A) = 0 \quad \blacksquare$$

ESEMPIO

$$A = \begin{vmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 0 & 1 \\ & & 1 & 0 \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} i \\ j \end{matrix}$$

matrice elementare ottenuta da I_n scambiando tra loro le righe i -esima e j -esima.
Allora

$$\boxed{\det(A) = -\det(I_n) = \underline{\underline{-1}}}$$

PROPOSIZIONE Aggiungendo ad una fissata riga di una matr. $n \times n$ A un multiplo qualsiasi di un'altra riga, il determinante non cambia.

Dim. $a \in \mathbb{R}$ fissato

$$\det \begin{vmatrix} \vdots & R \\ \vdots & S + aR \end{vmatrix} = \det \begin{vmatrix} \vdots & R \\ \vdots & S \end{vmatrix} + \det \begin{vmatrix} \vdots & R \\ \vdots & aR \end{vmatrix} = \det(A) + a \underbrace{\det \begin{vmatrix} \vdots & R \\ \vdots & R \end{vmatrix}}_{=0}$$

ESEMPIO

$$\det \begin{vmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & a \\ & & & \ddots \\ & & & & 1 \end{vmatrix} = \det(I_n) = 1 = \det \begin{vmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & a \\ & & & \ddots \\ & & & & 1 \end{vmatrix}$$