

$n \geq 1$ intero fissato $M_n = \{M \mid M \text{ è matrice } n \times n\}$

$\det: M_n \rightarrow \mathbb{R}$ funzione determinante.

PROPRIETÀ di $\det$

I $\det(I_n) = 1$

II "MULTILINEARITÀ" $\det$ è lineare rispetto a ciascuna riga della matrice A , separatamente. SPIEG.

III ALTERNANZA Se la matrice A ha due righe uguali, allora $\det(A) = 0$



IV ANTISIMMETRIA Se la matrice A' è stata ottenuta da A scambiando due righe, allora $\det(A') = -\det(A)$.

tralasciando qualsiasi

② $S_{ij} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{vmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 0 & 1 \\ & & 1 & 0 \\ & & & \ddots \\ & & & & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} i \\ j \end{matrix}$

SP $\rightarrow$

matrice elementare $n \times n$ $\det(S_{ij}) = -1$

M matrice $n \times p$ qualsiasi. $S_{ij}M$ è la matrice ottenuta da M scambiando tra loro le righe i -esima e j -esima.

$M_{i,c} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{vmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & c & \\ & & & \ddots \\ & & & & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} i \end{matrix}$

SP $\rightarrow$

$c \in \mathbb{R}, c \neq 0$ altro tipo di matrice elem. $n \times n$

$\det(M_{i,c}) = c$

$M_{i,c}M$ è la matrice che si ottiene da M moltiplicando l' i -esima riga per c .

$E_{ij,a} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{vmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & a & \\ & & & \ddots \\ & & & & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} i \\ j \end{matrix}$

SP $\rightarrow$

$a \in \mathbb{R}$ qualsiasi $\det(E_{ij,a}) = 1$

$E_{ij,a}M$ è la matrice che si ottiene da M sommando alla j -esima riga di M l' i -esima riga moltiplicata per a .

A $n \times n$

Antisimmetria $\Rightarrow \det(S_{ij}A) = -\det(A) = \det(S_{ij}) \cdot \det(A)$

Multilinearità $\Rightarrow \det(M_{i,c}A) = c \det(A) = \det(M_{i,c}) \cdot \det(A)$

L'ultima proposizione provata nella lezione precedente si

può esprimere così:

$$\det(E_{i,j,a} A) = \det(A) = \det(E_{i,j,a}) \cdot \det(A).$$

Possiamo riassumere le ultime osservazioni nel seguente

LEMMA

Se E è una qualsiasi matrice elementare $n \times n$, ed A è una qualsiasi matrice $n \times n$, allora

$$\boxed{\det(EA) = \det(E) \cdot \det(A)}$$

non o n

A matrice $n \times n$ qualsiasi

$$A \xrightarrow{\text{op. elem. sulle righe}} A' = \begin{cases} I_n & \det(A') = 1 \\ \text{ha l'ultima riga nulla} & \det(A') = 0 \end{cases}$$

$$A' = E_k \cdots E_2 E_1 A \Rightarrow \underbrace{\det(A')}_{\text{note}} = \underbrace{\det(E_k) \cdots \det(E_2) \det(E_1)}_{\text{note, e tutt. } \neq 0} \cdot \det(A) \quad (1)$$

TEOREMA di BINET

A, B matrici $n \times n$ qualsiasi. Allora $\boxed{\det(AB) = \det(A) \det(B)}$

Dim.

- Se A è una matrice elementare, allora è il Lemma.
- Suppongo A invertibile. Allora $A' = I_n$ e $A = E_1^{-1} E_2^{-1} \cdots E_k^{-1}$. Tutte le matrici E_i^{-1} sono ancora matrici elementari. Allora dal Lemma segue, innanzitutto, per induzione su k :

$$\det(A) = \det(E_1^{-1}) \cdot \det(E_2^{-1}) \cdots \det(E_k^{-1}).$$

Infine:

$$\begin{aligned} \det(AB) &= \det(E_1^{-1} E_2^{-1} \cdots E_k^{-1} B) \stackrel{\text{Lemma}}{=} \det(E_1^{-1}) \det(E_2^{-1} \cdots E_k^{-1} B) = \\ &= \det(E_1^{-1}) \det(E_2^{-1}) \det(E_3^{-1} \cdots E_k^{-1} B) = \cdots \stackrel{\text{Lemma}}{=} \\ &= \underbrace{\det(E_1^{-1}) \cdot \det(E_2^{-1}) \cdots \det(E_k^{-1})}_{= \det(A)} \cdot \det(B) = \det(A) \cdot \det(B) \end{aligned}$$

- Infine, se A non è invertibile, allora A' ha l'ultima riga nulla. Quindi $\det(A') = 0$ come abbiamo visto la scorsa volta. Ma allora, da (1) segue $\det(A) = 0$. Ora

$$E_k \cdots E_2 E_1 (AB) = (E_k \cdots E_2 E_1 A) B = A' B$$

↑
ha l'ultima riga nulla.

Allora anche $(AB)'$ (è il risultato dell'algoritmo di eliminazione di Gauss, applicato alla matrice AB) ha l'ultima riga nulla. Pertanto $\det((AB)') = 0$, per cui (come fatto sopra per la matrice A) si deduce che $\det(AB) = 0$.

Raccogliendo il tutto:

$$0 = \det(AB) = 0 \cdot \det(B) = \det(A) \det(B)$$

TEOREMA (IMP.!!)

SPIEG. il significato

A matrice $n \times n$. Allora: A è invertibile $\Leftrightarrow \det(A) \neq 0$

Dim.

A sia invertibile. Allora esiste una matrice $n \times n$ B tale che $AB = I_n$ ($B = A^{-1}$, B è unica). Applicando il Teorema di Binet si ha:

$$1 = \det(I_n) = \det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$$

da cui segue subito che non può essere $\det(A) = 0$.

Quindi $\det(A) \neq 0$.

Viceversa, supponiamo che si abbia $\det(A) \neq 0$.

Abbiamo l'alternativa: " A è invertibile" oppure " A non è invertibile", se non è vera l'una, allora è vera l'altra.

Può essere che A non sia invertibile?

In tal caso, ragionando come nell'ultima parte del t.d. Binet, si concluderebbe che $\det(A) = 0$ $\rightarrow$ assurdo!

ESEMPIO

2/11/16

(5)

SP
m

$$\det \begin{vmatrix} 3 & 5 & 0 & 8 \\ 1 & 0 & 5 & 3 \\ 2 & 4 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{SP m}} \det \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & 0 \\ 5 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 5 & 5 & 1 \\ 8 & 3 & 2 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^3 \det \begin{vmatrix} 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 5 & 5 \\ 0 & 8 & 3 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= -1 \cdot \det \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 5 & 0 & 4 \\ 8 & 3 & 2 \end{vmatrix} = - \det \begin{vmatrix} 3 & 5 & 8 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 2 \end{vmatrix}$$

è questo!

Tenendo opportunamente conto dei segni, si poteva sviluppare direttamente il determinante rispetto agli elementi dell'ultima riga!

$$\begin{vmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{vmatrix}$$

Questo è un fatto nuovo, importante e profondo. Vedremo di capirlo bene.

ESEMPIO

2/11/16

6

$$n=3 \quad A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ - & - & a_{33} \end{vmatrix} \begin{matrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{matrix} \quad R_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{vmatrix} = a_{11}e_1 + a_{12}e_2 + a_{13}e_3$$

linearità di det risp. 1^a riga

$$\det(A) = \det \begin{vmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{vmatrix} = \det \begin{vmatrix} a_{11}e_1 + a_{12}e_2 + a_{13}e_3 \\ R_2 \\ R_3 \end{vmatrix} = a_{11} \det \begin{vmatrix} e_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{vmatrix} + a_{12} \det \begin{vmatrix} e_2 \\ R_2 \\ R_3 \end{vmatrix} + a_{13} \det \begin{vmatrix} e_3 \\ R_2 \\ R_3 \end{vmatrix}$$

$$\det \begin{vmatrix} e_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{vmatrix} = \det \begin{vmatrix} e_1 \\ a_{21}e_1 + a_{22}e_2 + a_{23}e_3 \\ R_3 \end{vmatrix} = a_{21} \det \begin{vmatrix} e_1 \\ e_1 \\ R_3 \end{vmatrix} + a_{22} \det \begin{vmatrix} e_1 \\ e_2 \\ R_3 \end{vmatrix} + a_{23} \det \begin{vmatrix} e_1 \\ e_3 \\ R_3 \end{vmatrix}$$

lin. di det risp. 2^a riga

Come trattare $\begin{vmatrix} e_1 \\ e_2 \\ R_3 \end{vmatrix}$ e $\begin{vmatrix} e_2 \\ e_1 \\ R_3 \end{vmatrix}$?

Alla fine si arriva a

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

REGOLA di SARRUS

$$\det(A) =$$

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}$$

$$\det(A) = (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}) \det \begin{vmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{vmatrix}$$

$$\text{Ma } \begin{vmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{vmatrix} = I_3$$

= 1