

$d: M_m \rightarrow \mathbb{R}$ qualsiasi funzione che soddisfa le proprietà:

2. d è lineare separatamente risp. ciascuna riga (o colonna) di A

3. ~~Se A ha due righe (o due colonne) uguali, allora $\det(A) = 0$~~

$$1. \quad 2. \quad 3. \quad \Rightarrow d(S_{ij}) = -d(I_n) = \underline{\underline{-1}}$$

$$d(E_{i,j,a}) = d \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & a \\ 0 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ i & j \end{vmatrix} = d(I_n) + d \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & a \\ \vdots & \vdots \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 + a \cdot d \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \end{vmatrix} = \underline{\underline{1}}$$

$A \in M_m$ arbitraria, $E \in M_m$ m. elementari. Allora $d(AE) = d(A) \cdot d(E)$

Se $A = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ R & S \\ 1 & 1 \\ i & j \end{vmatrix}$ allora $AE = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ R & S + aR \\ 1 & 1 \\ i & j \end{vmatrix}$ e quindi:

$$d(AE) \stackrel{2.}{=} d \left(\underbrace{\begin{pmatrix} R & I \\ I & S \end{pmatrix}}_{=A} \right) + d \left(\begin{pmatrix} R & \\ & aR \end{pmatrix} \right) \stackrel{2.}{=} d(A) + a d \left(\underbrace{\begin{pmatrix} R & \\ & R \end{pmatrix}}_{=0} \right) = d(A) = d(A) d(\bar{E}_{i,j,a})$$

$$A' = \begin{cases} I_m \\ \text{oppure l'ultima colonna di } A' \text{ è nulla} \end{cases} \quad \begin{aligned} d(A') &= d(I_m) = 1 \\ d(A') &= 0 \quad \text{Infatti} \end{aligned}$$

$$d(A') = d \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix} = d \begin{vmatrix} 0 \cdot 0 \\ 0 \cdot 0 \\ \vdots \\ 0 \cdot 0 \end{vmatrix} \stackrel{2.}{=} 0 \cdot d \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{vmatrix} = 0$$

Tramite, in ogni caso:

$$\underline{\lambda(A') = \det(A')}$$

Applicando il lemma precedente a $A' = A E_1 \cdots E_k$ si trova

$$\underbrace{d(A) d(E_1) \cdots d(E_k)}_{= d(A')} = d(A') = \det(A') = \det(A) \underbrace{\det(E_1) \cdots \det(E_k)}_{= 1}$$

e si conclude $d(A) = \det(A)$.

Quindi una qualsiasi funzione $M_n \rightarrow \mathbb{R}$ che verifica le proprietà 1., 2., 3. (o per le righe, o per le colonne), coincide con la funzione determinante.

~ ~ ~ ~ ~

h intero fissato (arbitrariamente) $1 \leq h \leq n$.

$A \in M_n$ qualsiasi $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$ Ricordiamo che

per i, j fissati A_{ij} indica il determinante della m. $(n-1) \times (n-1)$ ottenuta da A sopprimendo la riga i -esima e la colonna j -esima.

$$(1) \quad d(A) \stackrel{\text{def}}{=} (-1)^{h+1} a_{h1} A_{h1} + (-1)^{h+2} a_{h2} A_{h2} + \cdots + (-1)^{h+n} a_{hn} A_{hn}$$

Volendo si può verificare che $d: M_n \rightarrow \mathbb{R}$ così definita verifica le proprietà 1., 2., 3. Dunque $d(A) = \det(A)$

Analogamente, se k è un intero fissato, con $1 \leq k \leq n$, e se A è come sopra, poniamo

$$(2) \quad \delta(A) \stackrel{\text{def}}{=} (-1)^{k+1} a_{1k} A_{1k} + (-1)^{k+2} a_{2k} A_{2k} + \cdots + (-1)^{k+n} a_{nk} A_{nk}$$

Dunque $\delta: M_n \rightarrow \mathbb{R}$ verifica le proprietà 1., 2., 3., dunque $\delta(A) = \det(A)$. (1) e (2) sono utilissime in pratica.

(1) e (2) si chiamano sviluppo del determinante d. A secondo gli elementi della riga h -esima, o della colonna k -esima. (1), (2) si chiamano anche formule di Laplace

3 segni "complicati" in (1) e (2)
 si accordano col semplice
 schema qui a lato

$$\begin{vmatrix} + & - & + & - & \dots \\ - & + & - & + & \dots \\ + & - & + & - & \dots \end{vmatrix}$$

Un modo migliore per capirla è quello di dimostrare
 la (1) o la (2) in un modo diverso SPIEG.

Facciamo la (2); sia fissato k , con $1 \leq k \leq n$, k inter.

con $k-1$ scambi
 tra colonne adiacenti
 porto la k -esima
 colonna al posto della
 prima colonna:

$$A = \begin{vmatrix} C_1 & C_2 & \dots & C_{k-1} & C_k & C_{k+1} & \dots \end{vmatrix}$$

$$B = \begin{vmatrix} C_k & C_1 & C_2 & \dots & C_{k-1} & C_{k+1} & \dots \end{vmatrix}$$

NB: non ho scambiato tra loro la k -esima e la prima colonna
 di A , per ottenere B .

SO che:

$$\det(B) = a_{1k} A_{1k} + a_{2k} A_{2k} + \dots + (-1)^n a_{nk} A_{nk}$$

Inoltre

$$B = A S_{k-1,k} S_{k-2,k-1} \dots S_{1,2} \xrightarrow{\text{B. di Binet}} \det(B) = \det(A) \cdot (-1)^{k-1}$$

da cui

$$\det(A) = \underbrace{(-1)^{k-1}}_{(-1)^{\frac{n}{k+1}}} \det(B) = \underbrace{(-1)^{k-1} a_{1k} A_{1k} + (-1)^{k+2} a_{2k} A_{2k} + \dots}_{\text{quindi ho dimostrato la (2).}}$$

non non

FORMULE di CRAMER

Le (1) e (2) si possono pensare come particolari entrate di
 un prodotto righe per colonne di matrici $n \times n$, di cui
 una delle due matrici è A .

$$C \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} (-1)^{1+k} A_{1k} \\ \vdots \\ (-1)^{n+k} A_{nk} \end{pmatrix} \quad \text{matrice dei cofattori} \quad C_{ij} = (-1)^{i+j} A_{ji}$$

$AC = ?$ è una matrice $n \times n$

Per (1) si riscrive così $\det(A) = a_{1h} C_{1h} + a_{2h} C_{2h} + \dots + a_{nh} C_{nh}$

Così

$$AC = \begin{vmatrix} \det(A) & & & \\ & \det(A) & & \\ & & \ddots & \\ & & & \det(A) \end{vmatrix}$$

Se $i \neq j$, che cos'è

$$a_{i1} C_{1j} + a_{i2} C_{2j} + \dots + a_{in} C_{nj} \quad ? \quad \boxed{\times}$$

La prossima pensava così

Se $A = \begin{vmatrix} \vdots \\ R_i \\ \vdots \\ R_j \\ \vdots \end{vmatrix}$ posto $B = \begin{vmatrix} \vdots \\ R_i \\ \vdots \\ R_i \\ \vdots \end{vmatrix}$ Allora

$$\boxed{\times} = \det(B) = 0$$

Dunque:

$$\boxed{AC = \det(A) I_n = CA}$$

Se $\det(A) \neq 0$, allora ne segue $A \cdot \left(\frac{1}{\det(A)} C \right) = I_n = \left(\frac{1}{\det(A)} C \right) A$

Così, se $\det(A) \neq 0$ (allora so che la matrice A è invertibile, e)

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} C}$$

ESEMPIO

$$A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \quad C = \begin{vmatrix} d & -b \\ -c & a \end{vmatrix}$$

Se $ad - bc \neq 0$ $A^{-1} = \begin{vmatrix} \frac{d}{ad-bc} & -\frac{b}{ad-bc} \\ -\frac{c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{vmatrix}$

$$A \begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e \\ f \end{vmatrix} \quad \text{con } \det(A) \neq 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix} = A^{-1} \left(A \begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix} \right) = A^{-1} \begin{vmatrix} e \\ f \end{vmatrix} = \frac{1}{\det(A)} C \begin{vmatrix} e \\ f \end{vmatrix}$$

$$x = \frac{de - bcf}{ad - bc} = \frac{\begin{vmatrix} e & b \\ f & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a & e \\ c & f \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}$$

$-ce + af$ OK

OKRIBILI

E X E

Verificare che $\psi \circ \phi = \text{id}_{\text{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)}$ e $\phi \circ \psi = \text{id}_{M(m \times n)}$

Dunque ϕ e ψ sono isomorfismi di spazi vettoriali.
In particolare, ne segue $\dim(\text{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)) = mn$.

Il prodotto righe per colonne è associativo

A. $m \times n$ B. $n \times p$ C. $p \times q$ matrici

$\mathbb{R}^m \xleftarrow{L_A} \mathbb{R}^n \xleftarrow{L_B} \mathbb{R}^p \xleftarrow{L_C} \mathbb{R}^q$

Red arrows: $\psi_{m \times n}$ from A to $\mathbb{R}^m$, $\psi_{n \times p}$ from B to $\mathbb{R}^n$, $\psi_{p \times q}$ from C to $\mathbb{R}^p$.

$\forall w \in \mathbb{R}^q$ si ha

$$L_A \circ \{(L_B \circ L_C)(w)\} = L_A \{L_B [L_C(w)]\} = \{L_A \circ L_B\} \circ L_C(w) \quad \text{cioè}$$

$$L_A \circ (L_B \circ L_C) = (L_A \circ L_B) \circ L_C$$

Red arrows: $\phi_{m \times n}$ from A to A, $\phi_{n \times q}$ from B to (BC), $\phi_{m \times p}$ from C to (AB), $\phi_{p \times q}$ from C to C.

$$A \quad (BC) = (AB) \quad C$$

l'associatività della composizione di applicazioni (in particolare: di appl. lineari) è facile.
Poi "traduci" con le ϕ per

avere la stessa relazione tra matrici.

Il prodotto righe per colonne gode della proprietà distributiva rispetto all'addizione.

$$A(B+C) = AB+AC$$

$$(A+B)C = AC+BC$$

$A \quad m \times n$ B, C $n \times p$

Red arrows: $\psi_{m \times n}$ from A to $\mathbb{R}^m$, $\psi_{n \times p}$ from B to $\mathbb{R}^n$, $\psi_{n \times p}$ from C to $\mathbb{R}^n$, $\psi_{m \times p}$ from (B+C) to $\mathbb{R}^m$.

$\mathbb{R}^m \xleftarrow{L_A} \mathbb{R}^n \xleftarrow{L_B} \mathbb{R}^p \xleftarrow{L_C} \mathbb{R}^p$

$$\forall u \in \mathbb{R}^p \quad L_A \{(L_B + L_C)(u)\} = L_A \{L_B(u) + L_C(u)\} =$$

$$= (L_A \circ L_B)(u) + (L_A \circ L_C)(u) = \underline{(L_A \circ L_B + L_A \circ L_C)(u)}$$

Red arrow: ϕ from the underlined expression to $AB+AC$.