

Particolari applicazioni lineari sono gli endomorfismi

$$f: V \longrightarrow V \quad \text{o} \quad f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

$\uparrow = \downarrow$ $\nwarrow$ "INTERNA"

Cioè f "lavora" dentro V (dentro $\mathbb{R}^n$).

Per capire come "funzionano", è spesso utile il seguente punto di vista:

- Esistono sottospazi vettoriali $W \subset V$ di V , di dimensione 1, tali che $f(W) = W$?

Ogni $w \in W$, $w \neq 0$, è base di W . Se vale (*), allora

possiamo pensare $f|_W: W \longrightarrow W$ come appl. lineare, o meglio: come endomorfismo di W .

$$M_{\{w\}}^{\{w\}}(f|_W) = (\lambda) \quad f(aw) = \lambda(aw)$$

In particolare:

$$\underline{f(w) = \lambda w} \quad (\lambda = 1)$$

Perché è utile tale p.v.?

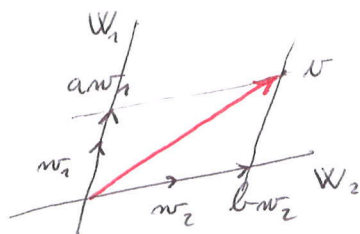
Immaginiamo che ~~non~~ $\dim(V) = 2$, per semplicità, e che esistano $W_1 \subset V$, $W_2 \subset V$ sottospazi vett. con $\dim(W_1) = \dim(W_2) = 1$, per i quali valgono rispettivamente

$$f(W_1) = W_1 \quad \text{e} \quad f(W_2) = W_2$$

Supponiamo anche (era ovvio, ma --) $W_1 \neq W_2$.

$$w_1 \in W_1 \quad w_1 \neq 0 \quad \underline{f(w_1) = \lambda w_1} \quad | \quad w_2 \in W_2 \quad w_2 \neq 0 \quad \underline{f(w_2) = \mu w_2}$$

Allora $V = W_1 \oplus W_2$ (EXE)

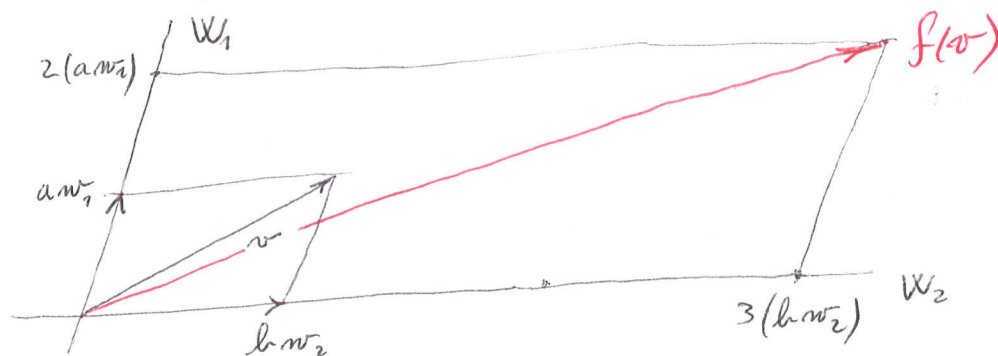


$$v \in V \text{ arbitrario} \quad v = a w_1 + b w_2$$

$$\begin{aligned} f(v) &= f(a w_1 + b w_2) = a f(w_1) + b f(w_2) = \\ &= a(\lambda w_1) + b(\mu w_2) = \dots = \underline{\lambda(a w_1) + \mu(b w_2)} \end{aligned}$$

Immaginiamo, per fissare le idee, che sia

$$\lambda = 2, \quad \mu = 3.$$



Il comportamento di f risulta piuttosto intuitivo!

OSSERVAZIONE Non sempre esistono sottospazi del tipo " W ".

ESEMPIO $V = \mathbb{R}^2$ e $f = L_A$ dove la matrice A è

$$A = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

L_A è una rotazione attorno al vettore nullo, di un angolo α

(in verso antiorario se $\alpha > 0$).

Sia $W \subset \mathbb{R}^2$ lo span di $\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Supponiamo $L_A(W) \subset W$

Questo implica che

$L_A(u) = \lambda u$ poiché u è base di W .

(Ma banalmente il viceversa: cioè se $L_A(u) = \lambda u$, allora $L_A(W) \subset W$).

explicitiamola $A \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ cioè

$$\begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda u_1 \\ \lambda u_2 \end{pmatrix} \quad \begin{cases} \cos(\alpha) u_1 - \sin(\alpha) u_2 = \lambda u_1 \\ \sin(\alpha) u_1 + \cos(\alpha) u_2 = \lambda u_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (\cos(\alpha) - \lambda) u_1 - \sin(\alpha) u_2 = 0 \\ \sin(\alpha) u_1 + (\cos(\alpha) - \lambda) u_2 = 0 \end{cases}$$

S.L. omogenea. Voglio che abbia la soluzione $\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ che non è la s. banale.

Allora deve essere necessariamente

$$\det \begin{vmatrix} \cos(\alpha) - \lambda & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \text{cioè}$$

$$0 = (\cos(\alpha) - \lambda)^2 + \sin^2(\alpha) = \cos^2(\alpha) - 2\cos(\alpha)\lambda + \lambda^2 + \sin^2(\alpha)$$

$\lambda^2 - 2\cos(\alpha)\lambda + 1 = 0$ cioè λ deve essere una soluzione dell'equazione

$$x^2 - 2\cos(\alpha)x + 1 = 0 \quad \Delta = 4\cos^2(\alpha) - 4 = 4(\cos^2(\alpha) - 1) \stackrel{?}{\geq} 0$$

$$\Delta \geq 0 \Leftrightarrow \cos^2(\alpha) - 1 \geq 0 \quad \text{Orn} \quad -1 \leq \cos(\alpha) \leq 1$$

Supponiamo α sia tale che $-1 < \cos(\alpha) < 1$ (h)

SE $\cos(\alpha) \geq 0$ allora $\cos^2(\alpha) < \cos(\alpha) \cdot 1 = \cos(\alpha) < 1$

SE $\cos(\alpha) < 0$ allora $0 < -\cos(\alpha) < 1$ e si ha

$$\cos^2(\alpha) = (-\cos(\alpha))^2 < -\cos(\alpha) \cdot 1 = -\cos(\alpha) < 1$$

Dunque, se vale (h) allora in ogni caso $\cos^2(\alpha) - 1 < 0$

L'unica possibilità per avere $\Delta \geq 0$ è che sia

$$\cos(\alpha) = 1, \text{ oppure } \cos(\alpha) = -1$$

Nel primo caso $A = I_2$ e $L_A = \text{id}_{\mathbb{R}^2}$ "non ruota nulla"

Nel second caso la rotazione è di 180° .

Se $\alpha \neq 0$ e $\alpha \neq \pi (=180^\circ)$, allora $\Delta < 0$ e non esiste alcun sottospazio W come richiesto.

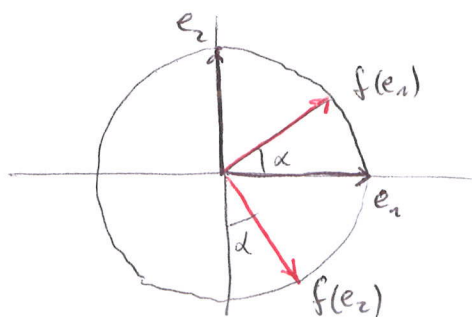
Per tirarci su di morale:

ESEMPIO $V = \mathbb{R}^2$ sempre e $f = L_A$, con

$$A = \begin{vmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & -\cos(\alpha) \end{vmatrix}$$

$$f(e_1) \quad f(e_2)$$

e_1, e_2 la base canonica di $\mathbb{R}^2$



f non è una rotazione.

Cerchiamo i sottospazi $W \subset \mathbb{R}^2$ (se esistono...) tali che $f(W) \subset W$. Si tratta sempre di trovare $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ $u \neq 0$ tale che $f(u) = \lambda u$ per qualche $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$L_A(u) = A \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & -\cos(\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda u_1 \\ \lambda u_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}}_{\lambda I_2} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

Per la proprietà distributiva del prodotto righe per colonne rispetto all'addizione di matrici, tale relazione si potrà anche scrivere:

$$A \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \lambda I_2 \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \Rightarrow A \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} - \lambda I_2 \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = 0_{\mathbb{R}^2} \Rightarrow \underline{(A - \lambda I_2) \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = 0_{\mathbb{R}^2}}$$

Concretamente

$$\begin{pmatrix} \cos(\alpha) - \lambda & \sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & -\cos(\alpha) - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{cases} (\cos(\alpha) - \lambda) u_1 + \sin(\alpha) u_2 = 0 \\ \sin(\alpha) u_1 - (\cos(\alpha) + \lambda) u_2 = 0 \end{cases} \quad (5)$$

SL omogenea, che vogliamo abbia la soluz. non banale $\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$. Allora necessariamente deve essere:

$$0 = \det \begin{pmatrix} \cos(\alpha) - \lambda & \sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & -(\cos(\alpha) + \lambda) \end{pmatrix} = -(\cos(\alpha) - \lambda)(\cos(\alpha) + \lambda) - \sin^2(\alpha) = \\ = -\cos^2(\alpha) + \lambda^2 - \sin^2(\alpha) = \lambda^2 - 1$$

$\lambda^2 - 1 = 0$ ha le soluzioni $\lambda = 1$ e $\lambda = -1$

Analizziamo separatamente i due casi:

$$\boxed{\lambda = 1} \quad \text{il S.L. omog. (5) è} \quad \begin{cases} (\cos(\alpha) - 1) u_1 + \sin(\alpha) u_2 = 0 \\ \sin(\alpha) u_1 + (\cos(\alpha) + 1) u_2 = 0 \end{cases}$$

La matrice dei coeff. ha rango 1 (il rango è ≤ 2 perché $\det(A - I_2) = 0$; inoltre $A - I_2$ non è la matrice 2×2 nulla (verificare per EXE)).

Quindi mi basta risolvere una sola delle due

equazioni; ad esempio, risolviamo la seconda:

$$\sin(\alpha) u_1 - (\cos(\alpha) + 1) u_2 = 0 \Rightarrow u_1 = \cos(\alpha) + 1 \quad u_2 = \sin(\alpha)$$

è una soluzione.

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) + 1 \\ \sin(\alpha) \end{pmatrix}$$

Dubbio: è vero che $u \neq 0$?

Se fosse $u=0$, allora $\sin(\alpha)=0$ soddisf. per $\alpha = k\pi$ dove $k \in \mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, \dots\}$. In particolare, se $\alpha = \pi$, allora $\cos(\alpha) = -1$ e $u = 0$!!!

Ma in tal caso (cioè $\alpha = \pi$) la seconda equazione del S.L. omog. è identicamente nulla. Allora dovremmo considerare la prima equazione...

In questi casi conviene andare a vedere che cosa diventa la matrice A originale per tali particolari valori di α . Nel nostro caso:

per $\alpha = \pi$ $A = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$ che significa: $f(e_1) = -e_1$
 $f(e_2) = e_2$

Quindi, se $\alpha = \pi$ $u = e_2$ "funzione" per $\lambda = 1$.

$\boxed{\lambda = -1}$ $(\cos(\alpha) + 1) u_1 + \sin(\alpha) u_2 = 0$ è sufficiente
 $u_1 = \sin(\alpha) \quad u_2 = -\cos(\alpha) - 1$

$w \neq 0 \quad w \in \mathbb{R}^2 \quad \text{t.c.} \quad f(w) = -w$

$$w = \begin{pmatrix} \sin(\alpha) \\ -\cos(\alpha) - 1 \end{pmatrix}$$

Quindi qui $w = 0_{\mathbb{R}^2}$ se $\alpha = \pi$. In tal caso prendi $w = e_1$.

u, w sono linearmente indipendenti?

$$\det \begin{vmatrix} \cos(\alpha) + 1 & \sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & -(\cos(\alpha) + 1) \end{vmatrix} =$$

$$= -(\cos(\alpha) + 1)^2 - \sin^2(\alpha) = -\cos^2(\alpha) - 2\cos(\alpha) - 1 - \sin^2(\alpha) = -2(\cos(\alpha) + 1)$$

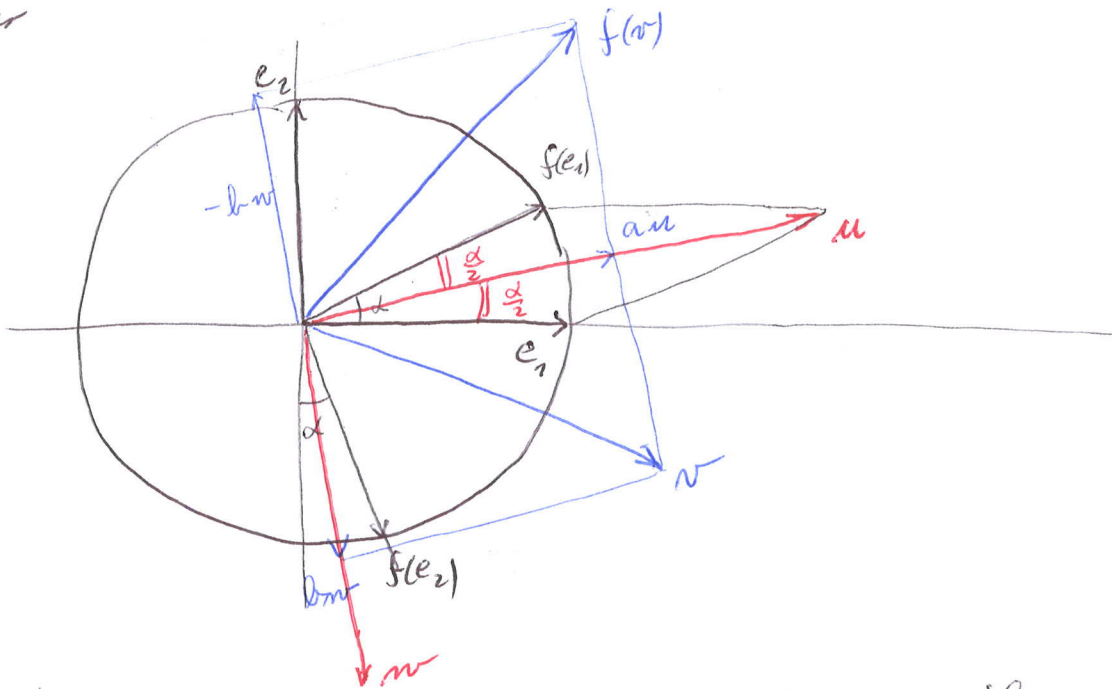
$$-2(\cos(\alpha)+1)=0 \Leftrightarrow \cos(\alpha)=-1 \Rightarrow \underline{\alpha=\pi}$$

In tal caso $u=e_2$ e $w=e_1$ e quest. sono lin. indep.
 Altrimenti u, w sono linearmente indep senza problemi
 dunque $\{u, w\}$ è base di $\mathbb{R}^2$.

$$v \in \mathbb{R}^2 \text{ qualsiasi} \quad v = au + bw \quad a, b \in \mathbb{R}$$

$$f(v) = f(au + bw) = a f(u) + b f(w) = \underline{\underline{au - bw}}$$

Vedremo in seguito che u, v sono "perpendicolari" tra loro



$$u = \begin{vmatrix} \cos(\alpha)+1 \\ \sin(\alpha) \end{vmatrix} = f(e_1) + e_1$$

in questo caso il parallelogramma
 che dà la costruzione grafica di
 $f(e_1) + e_1$ è un rombo. Quest ha
 conseguenze geometriche.

$$w = f(e_2) - e_2$$

OSSERVAZIONE

La matrice A nell'ultimo esempio ha determinante -1 ,
 dunque è invertibile. I_2 è certamente invertibile. Ma
 $\det(A + I_2) = 0$. Dunque: la somma di matrici investi-
 bili non è necessariamente invertibile.