Intensità istantanea di interesse

Consideriamo una funzione di capitalizzazione di IV livello:

$$f(t) \qquad t \geq 0$$

tale che $f(0) = 1$

$f(t)$ monotona crescente

$f(t)$ continua e derivabile

con riferimento all'intervallo $[t, t+h]$ si definisce **intensità media di interesse** tra t e $t+h$

$$r(t,h) = \frac{f(t+h) - f(t)}{f(t) \cdot h}$$

Per la derivabilità di $f(t)$ si ha

$$\lim_{h \to 0} r(t,h) = \lim_{h \to 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{f(t) \cdot h} = \frac{f'(t)}{f(t)} = D[\log f(t)]$$

Si definisce **intensità istantanea di interesse** o **tasso istantaneo di interesse** o **forza di interesse**

$$\rho(t) = \frac{f'(t)}{f(t)} = D[\log f(t)]$$

Per definire una funzione di capitalizzazione si può assegnare direttamente la funzione:

$$f(t) \qquad t \geq 0$$

oppure si può assegnare l'intensità istantanea di interesse $\rho(t)$

Infatti, poiché $\qquad \rho(t) = D[\log f(t)]$

integrando si ottiene

$$\int_0^t \rho(s)\, ds = \int_0^t D[\log f(s)] ds$$

Poiché

$$\int_0^t D[\log f(s)] ds = \log f(t) - \log f(0) = \log f(t)$$

si ha

$$\int_0^t \rho(s)\, ds = \log f(t)$$

quindi

$$f(t) = \exp\left[\int_0^t \rho(s)\, ds\right]$$

è pertanto equivalente assegnare la funzione $f(t)$ oppure la funzione $\rho(t)$, $t \geq 0$

Per i tre regimi finanziari si ha:

- <u>regime dell'interesse semplice</u>: $f(t) = 1 + i \cdot t$

$$f'(t) = i \qquad \rho(t) = \frac{f'(t)}{f(t)} = \frac{i}{1 + i \cdot t}$$ funzione decrescente

- <u>regime dello sconto commerciale</u>: $f(t) = \dfrac{1}{1 - d \cdot t}$

$$f'(t) = \frac{d}{(1 - d \cdot t)^2} \qquad \rho(t) = \frac{f'(t)}{f(t)} = \frac{d}{1 - d \cdot t}$$ funzione crescente

- <u>regime della capitalizzazione composta</u>: $f(t) = (1 + i)^t$

$$f'(t) = (1 + i)^t \log(1 + i) \qquad \rho(t) = \frac{f'(t)}{f(t)} = \frac{(1 + i)^t \log(1 + i)}{(1 + i)^t} = \log(1 + i)$$

funzione costante

Si definisce **intensità istantanea di interesse**

$$\delta = \log(1 + i)$$

Poiché $1 + i = e^{\delta}$ si ha $f(t) = (1 + i)^t = e^{\delta t}$ $\qquad \varphi(t) = (1 + i)^{-t} = e^{-\delta t}$