

$$\text{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) = \{f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m \mid f \text{ è appl. lineare}\} = H$$

$$f, g \in H \quad \mathbb{R}^n \xrightarrow[f]{g} \mathbb{R}^m \quad \forall v \in \mathbb{R}^n \quad f(v), g(v) \in \mathbb{R}^m \Rightarrow f(v) + g(v) \in \mathbb{R}^m$$

Così ho una nuova applicazione $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m \quad v \mapsto f(v) + g(v)$

$\forall v \in \mathbb{R}^n$. La indico con $f+g$ per il momento è solo notazione

EXE $f+g$ è appl. lineare, cioè $f+g \in H$

Quindi in questo modo so associare a due qualsiasi element f, g di H un nuovo el. t di H , indicato con $f+g$.

$$f \in H \quad \lambda \in \mathbb{R} \text{ arbitrari} \quad \forall v \in \mathbb{R}^n \quad f(v) \in \mathbb{R}^m \xrightarrow{\text{prod. vett. per scalari in } \mathbb{R}^n} \lambda f(v) \in \mathbb{R}^m$$

Nuova applicazione $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m \quad v \mapsto \lambda f(v) \quad \forall v \in \mathbb{R}^n$. La indico λf (è solo notazione)

EXE λf è appl. lineare $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, cioè $\lambda f \in H$.

EXE Rispetto alle operazioni definite sopra, $H = \text{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ è uno spazio vettoriale.

M : spazio vett. di tutte le matrici $n \times m$.

$$\varphi: M \rightarrow H \quad \varphi(A) = L_A \quad (\text{Abbate-de Falbritis la indico con "L"})$$

φ è applicazione lineare

Dim
Siano $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$ e $B = (b_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$ due elementi $\forall$ di M .
arbitrari

$$A+B = (a_{ij} + b_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & \dots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}$$

$$\varphi(A+B) = L_{A+B} \quad \text{Come "funzione" l'appl. lineare } L_{A+B}?$$

$e_1, \dots, e_n$: la base canonica di $\mathbb{R}^n$ 9/11/16

(2)

$$L_{A+B}(e_1) = (A+B) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} \\ a_{21} + b_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{m1} \end{bmatrix} = L_A(e_1) + L_B(e_1)$$

In modo perfettamente analogo si verifica che

$$L_{A+B}(e_j) = L_A(e_j) + L_B(e_j) \quad \forall j = 1, 2, \dots, n. \Rightarrow$$

$$\boxed{L_{A+B}(v) = L_A(v) + L_B(v) \quad \forall v \in \mathbb{R}^n} \quad \text{Infatti, se } v = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n$$

$\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ allora si ha $\leftarrow (**)$

$$L_{A+B}(v) = L_{A+B}(\alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n) \stackrel{L_{A+B} \text{ è lineare}}{=} \alpha_1 L_{A+B}(e_1) + \dots + \alpha_n L_{A+B}(e_n) = \quad (*)$$

$$= \alpha_1 \{L_A(e_1) + L_B(e_1)\} + \dots + \alpha_n \{L_A(e_n) + L_B(e_n)\} =$$

$$= \underbrace{\alpha_1 L_A(e_1) + \dots + \alpha_n L_A(e_n)}_{L_A \text{ è lineare}} + \alpha_1 L_B(e_1) + \dots + \alpha_n L_B(e_n) =$$

$$= L_A(\alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n) + L_B(\alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n) = L_A(v) + L_B(v)$$

Abbiamo così verificato che vale (**). Il significato di

(**) è

$$\psi(A+B) = \psi(A) + \psi(B) \quad \leftarrow \begin{array}{l} \text{l'operaz. in } H \text{ che abbiamo} \\ \text{definito all'inizio della} \\ \text{lezione} \end{array}$$

$\psi(A+B) \quad \psi(A) \quad \psi(B)$

Riassumendo: prese comunque $A, B \in M$ si ha: $\psi(A+B) = \psi(A) + \psi(B)$

Analogamente si prova (FATTO!) che, prese comunque $A \in M$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, si ha $\psi(\lambda A) = \lambda \psi(A)$

$\text{Ker}(\psi) = ?$ $A \in M$ sia tale che $L_A = O_n: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$

($O_n(v) = O_{\mathbb{R}^m} \quad \forall v \in \mathbb{R}^n$). In particolare:

$$L_A(e_j) = O_n(e_j) = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^m \quad \forall j \quad \text{Ma} \quad L_A(e_j) = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}, \text{ dunque}$$

$a_{ij} = 0 \quad \forall i = 1, \dots, m$. Ma questo vale $\forall j = 1, \dots, n$

Allora $A = 0$ matrice $m \times n$ tutta nulla.

Dunque $\text{Ker}(\varphi) = \{0\} \Rightarrow \varphi$ è iniettiva.

Infine φ è anche suriettiva. Infatti per ogni $f \in M$,
se $A = M_{\substack{B_c \\ B'_c}}^{B_c}(f)$, allora $f = L_A = \varphi(A)$.

Riassumendo: φ è un isomorfismo di spazi vettoriali.

OSSERVAZIONE

Avendo a che fare con $\mathbb{R}^n$ ed $\mathbb{R}^m$ era naturale usare le basi canoniche di tali spazi vettoriali. Se U, V sono sp. vett. qualsiasi, con $\dim(U) = n$ e $\dim(V) = m$, allora si può ancora definire un' applicazione $\varphi: M \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{R}}(U, V)$ SE abbiamo fissato una base B di U ed una base C di V .
 φ dipende dalla scelta di tali basi.

Ci servirà, in particolare, il caso in cui $U = V$. Allora le matrici in M sono $n \times n$, quadrate.

~ o ~ o ~

$f: V \rightarrow V$ endomorfismo (lineare)

Però abbiamo visto che è importante cercare (se esistono) dei $v \in V$ tali che

- $v \neq 0$
 - esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che $f(v) = \lambda v$
- se succede quest, allora
 $\left\{ \begin{array}{l} v \text{ è detto } \underline{\text{AUTOVETTORE}} \text{ per} \\ \text{l'end. } f, \text{ relativo all' } \\ \underline{\text{AUTOVALORE } \lambda} \end{array} \right.$

ESEMPIO Se $\text{Ker}(f) \neq \{0\}$, allora ogni $v \in \text{Ker}(f)$, $v \neq 0$ è aut. vettore per f , relativo all' autovale $0 \in \mathbb{R}$.

come si trovano autovettori ed autovalori? Essi:

- prima si trovano gli autovalori per f
- poi, per ciascun autovalore si trovano i relativi autovettori.

Ricerca degli autovalori per un endomorfismo $f: V \rightarrow V$.

Si tratta di re-interpretare gli ingredienti della def. di autovettore e autovalore. Siano $v \in V$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ tal. che $v \neq 0_v$ e $\underbrace{f(v) = \lambda v}_K$ partiamo da qui

$\text{id}_V: V \rightarrow V$ $\text{id}_V(v) = v \quad \forall v \in V$ è un endomorf. di V ,
cioè appartiene ad $\mathcal{H} = \text{Hom}_{\mathbb{R}}(V, V)$

$$\lambda \text{id}_V: V \rightarrow V \quad (\lambda \text{id}_V)(v) = \lambda \cdot \text{id}_V(v) = \lambda \cdot v \quad \forall v \in V$$

ecco!

Quindi $\lambda \text{id}_V \in \mathcal{H}$ cioè è un endomorf. di f .

Piccola variante $(-\lambda) \cdot \text{id}_V \in \mathcal{H} \quad (-\lambda) \text{id}_V(v) = -\lambda v \quad \forall v \in V$

Orsì

$$f(v) = \lambda v \iff f(v) - \lambda v = 0 \iff f(v) + (-\lambda) \text{id}_V(v) = 0$$

Ma $f + (-\lambda) \text{id}_V \in \mathcal{H}$, è anche lui un endom. di V .

Quindi, per come è def. "+" in $\mathcal{H}$ abbiamo che

$$f(v) = \lambda v \iff \boxed{(f - \lambda \text{id}_V)(v) = 0_v}$$

$V \xrightarrow{f - \lambda \text{id}_V} V$ | caso particolare di spazi vettoriali della stessa dimensione.

Adesso entra in ballo la condizione $v \neq 0_v$. Questo significa che $\text{Ker}(f - \lambda \text{id}_V) \neq \{0\}$ (N)

A quest punto fissiamo una base (ordinata) B di V .
 Usiamo B come base sia per il dominio che per il codominio (è sempre V , ...) degli endomorfismi che ci interessano.

$A = M_B^B(f)$ Allora, per la prima parte della lezione

$$M_B^B(f - \lambda \text{id}_V) = \underline{A - \lambda I_m} \quad \psi(A - \lambda I_m) = L_{A - \lambda I_m} = f - \lambda \text{id}_V$$

La condizione (N) si traduce allora in

il sist. lineare omogeneo $(A - \lambda I_m)X = 0_{\mathbb{R}^n}$ $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$
 di n equazioni in n incognite ha soluzioni non-triviali.

Ma questo può accadere solo se $\det(A - \lambda I_m) = 0$ ($n \neq 0$)

$$\det(A - \lambda I_m) = \det \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} - \lambda \end{vmatrix} \stackrel{\text{SPEG.}}{=} \dots$$

$$= (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) \dots (a_{nn} - \lambda) + \text{"ALTRO"} =$$

$$= (-1)^n \lambda^n + (-1)^{n-1} (a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}) \lambda^{n-1} + \dots + c_n$$

è un polinomio in λ , di grado n

Per il momento lo chiamiamo polinomio caratteristico di A $p_A(\lambda)$ λ la pensiamo come indeterminata (come la " x " ...).

Chi è il termine noto di $p_A(\lambda)$? Chiaramente è

$$p_A(0) = \det(A)$$

$$c_n = \det(A)$$

$$a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn} = \text{tr}(A)$$

la traccia di A

coeff. di $p_A(\lambda)$ "hanno a che fare" con la matrice A .

Gli autovalori di f sono le soluzioni dell'equazione polinomiale

$$p_A(\lambda) = 0$$

Poichè $p_A(\lambda)$ ha grado n , questa ~~equazione~~ ^{equazione} ha, al più n soluzioni distinte.

ESEMPIO 1

$$A = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 3 & 3 & 5 \end{vmatrix} \quad p_A(\lambda) = \det \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & 1 \\ 2 & 4-\lambda & 2 \\ 3 & 3 & 5-\lambda \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{EXE}} -\lambda^3 + 12\lambda^2 - 36\lambda + 32$$

Dobbiamo trovare le soluzioni di $-\lambda^3 + 12\lambda^2 - 36\lambda + 32 = 0$

Osserviamo che (è uno dei trucchi del mestiere)

- tutti i coefficienti di questo polinomio sono num. interi
- il coeff. del monomio di grado più alto (" λ^3 ") è -1 (anche "+1" ci andrebbe bene).

Allora, se l'equazione ha qualche numero intero come radice, questo è tra i divisori del termine noto

Nel nostro caso, i divisori di 32 sono $\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8, \pm 16, \pm 32$. $+1$ e -1 non funzionano

$$p_A(2) = -2^3 + 12 \cdot 2^2 - 36 \cdot 2 + 32 = -8 + 48 - 72 + 32 = 0 !$$

Allora $p_A(\lambda)$ è divisibile per $\lambda - 2$ (SPEG.) p. 7) ☒

$$\begin{array}{r|l} -\lambda^3 + 12\lambda^2 - 36\lambda + 32 & +\lambda^2 + 10\lambda + 16 \\ -\lambda^3 + 2\lambda^2 & \text{SOTTRAGGO!} \\ \hline 10\lambda^2 - 36\lambda + 32 & \\ +10\lambda^2 + 20\lambda & \\ \hline -16\lambda + 32 & \end{array}$$

Dunque

$$p_A(\lambda) = (\lambda - 2)(-\lambda^2 + 10\lambda - 16)$$

$$\lambda^2 - 10\lambda + 16 = 0 \quad \text{ha le soluzioni} \quad \frac{10 \pm \sqrt{100 - 4 \cdot 16}}{2} = \frac{10 \pm \sqrt{36}}{2}$$

$$\frac{10 \pm 6}{2} = \begin{cases} 8 \\ 2 \end{cases}$$

$$p_A(\lambda) = -(\lambda - 2)(\lambda - 8)(\lambda - 2) = -(\lambda - 2)^2(\lambda - 8)$$

L'esponente "2" di $(\lambda - 2)$ è detto multiplicità algebrica della radice 2 per $p_A(\lambda)$.

Def. Sia $p(\lambda)$ un polinomio di grado $n \geq 1$, a coeff. reali, e sia $a \in \mathbb{R}$ una sua radice, cioè $p(a) = 0$. Diremo che a ha multiplicità algebrica r come radice di $p(\lambda)$, con $1 \leq r \leq n$, se $p(\lambda) = (\lambda - a)^r \cdot q(\lambda)$ e vale anche $q(a) \neq 0$.

☒ $p(\lambda)$ polinomio di grado $n \geq 1$, a coeff. in $\mathbb{R}$
 $a \in \mathbb{R}$ una sua radice, cioè $p(a) = 0$.

Applicare l'algoritmo della divisione con resto a $p(\lambda)$ e $\lambda - a$. Trovare due polinomi (il quoziente ed il resto della divisione) $q(\lambda)$ e $r(\lambda)$ tali che

$$p(\lambda) = (\lambda - a) q(\lambda) + r(\lambda) \quad \begin{array}{l} r(\lambda) = 0 \text{ oppure il grado di} \\ r(\lambda) \text{ è } < \text{del grado di } \lambda - a, \\ \text{che è } 1. \end{array}$$

Dunque in ogni caso $r(\lambda) \in \mathbb{R}$, cioè è un pol. costante.
 Sostituire ovunque a a λ in (b):

$$0 = p(a) = (a - a) \underbrace{q(a)}_{r(a)} + \underline{\underline{r(a)}} \quad \text{---} \quad \underline{\underline{r(a) = 0}}$$

significa che il
 resto della divis.
 è zero

Dunque $p(\lambda) = (\lambda - a) q(\lambda)$, cioè p è "divisibile" per $(\lambda - a)$