

$f: V \rightarrow V$ endomorfismo (lineare) V sp. vett. / $\mathbb{R}$ $\dim(V) = n$.

B base di V $p_A(\lambda) := \det(A - \lambda I_n)$ dove $A = M_B^B(f)$.

Sia C un'altra base di V , e sia $B = M_C^C(f)$.

In che relazione sono tra di loro i polinomi $p_A(\lambda)$ e $p_B(\lambda)$?

Ricordiamo, innanzitutto, in che relazione sono tra di loro le matrici A e B .

$$\begin{array}{ccc} \begin{array}{c} C \\ V \end{array} & \xrightarrow{f} & \begin{array}{c} C \\ V \end{array} \\ \downarrow id_V & & \uparrow id_V \\ \begin{array}{c} B \\ V \end{array} & \xrightarrow{f} & \begin{array}{c} B \\ V \end{array} \end{array} \quad \text{le basi} \quad \text{allora: SPIEG.}$$

$$B = M_C^C(f) = M_C^B(id_V) \cdot \underbrace{M_B^B(f)}_{= A} \cdot \underbrace{M_B^C(id_V)}_{=: P}$$

P è una matrice di cambiamento di base, dunque è invertibile.

$P^{-1} = M_B^C(id_V)$. Quindi abbiamo

$$\boxed{B = P^{-1}AP} \quad \text{con } P \text{ invertibile}$$

(meglio: "A è simile a B")

Def. Due matrici $n \times n$ A e B si dicono simili se esiste una matrice invertibile $n \times n$ P t.c. $B = P^{-1}AP$

"A è simile a B" è una relazione di equivalenza nell'insieme di tutte le matrici quadrate $n \times n$. Infatti.

1. A è simile a se stesso: $A = I_n^{-1} A I_n = I_n^{-1} A I_n$ p. RIFLESSIVA

2. Se A è simile a B, allora B è simile ad A p. SIMMETRICA

$$A \text{ è simile a } B \Leftrightarrow B = P^{-1}AP \Rightarrow PB = \underbrace{PP^{-1}}_{= I_n} AP \Rightarrow \underbrace{PBP^{-1}}_{=: A} = \underbrace{APP^{-1}}_{= I_n} = A$$

e si ha $P = (P^{-1})^{-1}$.

3. Se A è simile a B e B è simile a C, allora A è simile a C p. TRANSITIVA

$$B = P^{-1}AP, \quad C = Q^{-1}BQ = Q^{-1}P^{-1}APQ = (Q^{-1}P^{-1})A(PQ) \quad \text{e} \quad Q^{-1}P^{-1} = (PQ)^{-1}$$

Ora siamo in grado di capire la relazione tra $p_A(\lambda)$ e $p_B(\lambda)$

$$p_B(\lambda) = \det(B - \lambda I_m) = \det(P^{-1}AP - \lambda I_m)$$

$$\lambda I_m = \underbrace{\begin{vmatrix} \lambda & & \\ & \lambda & \\ & & \ddots \\ & & & \lambda \end{vmatrix}}_{m \times m} = (\lambda I_m) I_m = (\lambda I_m) P^{-1}P \quad \text{ma si ha anche}$$

$$\lambda I_m = \left[\begin{array}{c|c|c|c|c} \begin{vmatrix} \lambda & & \\ & \lambda & \\ & & \ddots \\ & & & \lambda \end{vmatrix} & & & & \\ \hline & \begin{vmatrix} \lambda & & \\ & \lambda & \\ & & \ddots \\ & & & \lambda \end{vmatrix} & & & \\ \hline & & \ddots & & \\ \hline & & & \begin{vmatrix} \lambda & & \\ & \lambda & \\ & & \ddots \\ & & & \lambda \end{vmatrix} & \\ \hline & & & & \begin{vmatrix} \lambda & & \\ & \lambda & \\ & & \ddots \\ & & & \lambda \end{vmatrix} \end{array} \right] \quad \text{matrici elementari}$$

Quindi la matrice $(\lambda I_m)P^{-1}$ è quella che si ottiene moltiplicando ogni riga di P^{-1} per λ . Ora, la matrice $P^{-1}(\lambda I_m)$ è quella che si ottiene moltiplicando ogni colonna di P^{-1} per λ . Pertanto $(\lambda I_m)P^{-1} = P^{-1}(\lambda I_m)$, e allora:

$$p_B(\lambda) = \det(P^{-1}AP - (\lambda I_m)P^{-1}P) = \det(P^{-1}AP - P^{-1}(\lambda I_m)P) \stackrel{(*)}{=}$$

$$= \det(P^{-1}(A - \lambda I_m)P) \stackrel{a}{=} \text{B. d. Binet}$$

$$= \det(P^{-1}) \det(A - \lambda I_m) \cancel{\det(P)} =$$

$$\cancel{\det(P)} \stackrel{b}{=} \det(A - \lambda I_m) = p_A(\lambda)$$

proprietà distributiva del prodotto righe per colonne
risp. alla somma di matrici

$$\boxed{p_B(\lambda) = p_A(\lambda)}$$

Quindi non ha alcuna importanza quale base ^{d.v.} usiamo per calcolare il polinomio caratteristico. Il polinomio caratteristico è legato all'endomorfismo f piuttosto che alla matrice che rappresenta f rispetto ad una data base.

INSERIRE $\boxtimes$ a p. 7 della Lezione 26

Sia $a \in \mathbb{R}$ un autovalore di $f: V \rightarrow V$ (se esiste)

Sia B una base di V , fissata ad arbitrio, e sia
al solito $A = M_B^B(f)$.

Definizione: $\{ \text{autovettori di } f \text{ relativi ad } a \} \cup \{0_V\} = \text{Ker}(f - a \text{ id}_V) =: E_a$ AUTOSPAZIO
(ogni autovettore è $\neq 0_V$ per definizione)

Quindi determinare $\text{Ker}(f - a \text{ id}_V)$ equivale a trovare il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ formato da tutte le soluzioni del S.L. omogeneo

$$AX = aX \Leftrightarrow (A - aI_n)X = 0_{\mathbb{R}^n} \quad (2)$$

ESEMPIO $V = \mathbb{R}^2$ $f = L_A: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dove

$$A = \begin{pmatrix} -5 & -9 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$$

$$p_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} -5-\lambda & -9 \\ 4 & 7-\lambda \end{pmatrix} = (-5-\lambda)(7-\lambda) + 36 = -35 + 5\lambda - 7\lambda + \lambda^2 + 36 = \lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2$$

L'unico autovalore per L_A è 1

Per trovare i relativi autovettori dobbiamo risolvere

$$\left(\begin{pmatrix} -5 & -9 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -6 & -9 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -6 & -9 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad 2x_1 + 3x_2 = 0 \quad E_1 = \text{span} \left(\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} \right)$$

non

$$\dim(E_1) = 1$$

Un dato importante è la dimensione dell'autospazio E_a . Questa è uguale al numero di variabili libere nel S.L. (2). Tale numero è

$$n - p(A - aI_n)$$

Def. $\dim(E_a)$ si chiama MOLTEPLICITA' GEOMETRICA
dell'autovalore a di f : $m_g(a)$

Ricordiamo che un autovalore ha anche una molteplicità algebrica $m_a(a) = m$ se $m_{alg}(a)$

$$p_f(\lambda) = (\lambda - a)^m q(\lambda) \quad \text{e} \quad q(a) \neq 0.$$

PROPOSIZIONE Per ogni autovalore a di f si ha $m_g(a) \leq m_a(a)$

Dim. Sia $v_1, \dots, v_{m_g(a)}$ una base di E_a . La completiamo ad una base $v_1, \dots, v_{m_g(a)}, v_{m_g(a)+1}, \dots, v_n$ di V , che indichiamo con B .

$A \stackrel{u}{=} M_B^B(f) = \begin{pmatrix} a & 0 & & 0 \\ 0 & a & & 0 \\ 0 & 0 & & 0 \\ \hline 0 & 0 & & a \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} B \end{pmatrix}$

B è una matrice $(n - m_g(a)) \times (n - m_g(a)) =: r$

SPIEGA

quest blocco è $m_g(a) \times m_g(a)$

$av_1 = f(v_1)$ $f(v_2) = av_2$

$$p_f(\lambda) = \det(A - \lambda I_n) = \det \begin{pmatrix} a - \lambda & & & \\ & a - \lambda & & \\ & & \ddots & \\ & & & a - \lambda \\ \hline & & & 0 & & \\ & & & & & B - \lambda I_r \end{pmatrix} \stackrel{\text{SPIEGA.}}{=} \det(B - \lambda I_r) \cdot (a - \lambda)^{m_g(a)}$$

$$= (a - \lambda)^{m_g(a)} \cdot \underbrace{\det(B - \lambda I_r)}_{q(\lambda) :=} = (a - \lambda)^{m_g(a)} \cdot q(\lambda)$$

" $\leq$ " perché potrebbe benissimo essere $q(a) = 0$
come mostra l'esempio di pag. 3.

ESEMPIO

$$V = \mathbb{R}^3$$

$$f = L_A \text{ dove}$$

$$A = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{3} & -1 \\ 0 & 1 & \sqrt{3} \end{vmatrix} \quad \frac{10/11/16}{(5)}$$

$$p_A(\lambda) = \det \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{3}-\lambda & -1 \\ 0 & 1 & \sqrt{3}-\lambda \end{vmatrix} =$$

uso regola di Sarrus

$$= \underbrace{(2-\lambda)(\sqrt{3}-\lambda)^2}_{\text{Oss.: c'è "ALTRO"}} + \underbrace{2-\lambda}_{\text{ALTRO}} = (2-\lambda)(3-2\sqrt{3}\lambda+\lambda^2+1) = \underbrace{(2-\lambda)}_{\lambda=2 \text{ è autovale}}(\lambda^2-2\sqrt{3}\lambda+4)$$

$$\lambda^2-2\sqrt{3}\lambda+4=0 \quad \Delta = 12-16 = -4 < 0$$

L'unico autovale di L_A è 2 $p_A(\lambda) = -(\lambda-2)(\lambda^2-2\sqrt{3}\lambda+4)$

ESEMPIO $V = \mathbb{R}^3$ $f = L_A$ dove A è la matrice:

$$A = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

Si calcola:

$$p_A(\lambda) = -\lambda^3 + 10\lambda^2 - 29\lambda + 24$$

ha tutti i coeff. interi ed il coeff. DIRETTIVO $= \pm 1$.

Allora è sensato cercare una radice tra i divisori di 24

$$\lambda=1 \quad \lambda=-1 \quad \text{non funzionano} \quad p_A(2) = -2 \neq 0$$

$$p_A(3) = 0 !!!$$

$$p_A(\lambda) = -(\lambda-3)(\lambda^2-7\lambda+8)$$

$$\lambda^2-7\lambda+8=0 \quad \text{ha 2 radici} \quad \frac{7 \pm \sqrt{49-32}}{2} = \frac{7 \pm \sqrt{17}}{2}$$

$$p_A(\lambda) = -(\lambda-3)\left(\lambda - \frac{7+\sqrt{17}}{2}\right)\left(\lambda - \frac{7-\sqrt{17}}{2}\right) \quad \text{gli autovalori di } L_A$$

ESERCIZIO

Verificare che $p_A(\lambda) = -(\lambda-1)(\lambda-3)^2$

dove

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 4 \end{vmatrix}$$

Riassumiamo A matrice $n \times n$

$p_A(\lambda)$ è un polinomio a coeff. real., di grado n .

Siano $a_1, a_2, \dots, a_r \in \mathbb{R}$ le sue radici (possono anche non esserci), a due a due distinte.

Si ha la scomposizione in fattori

$$p_A(\lambda) = \cancel{\lambda} \cancel{\lambda} \dots (\lambda - a_1)^{m_1} (\lambda - a_2)^{m_2} \dots (\lambda - a_r)^{m_r} f(\lambda) g(\lambda) \dots$$

• Dove $f(\lambda), g(\lambda), \dots$ sono polinomi senza radici.

Nel nostro caso (i polin. hanno tutti i coeff. in $\mathbb{R}$)

$f, g, \dots$ hanno tutti grado ≥ 2 , e $\Delta < 0$.

• Più lenissimamente capiterà $f = g = \dots$

• m_j è la molteplicità algebrica per a_j . $\forall j$

~ ~ ~

PROPOSIZIONE $f: V \rightarrow V$ lineare. Siano $a_1, \dots, a_r$ autovalori distinti di f , e siano $v_1, \dots, v_r \in V$ autovettori relativi rispettivamente agli autovalori $a_1, \dots, a_r$ (cioè: $f(v_h) = a_h v_h$ e $v_h \neq 0$ per ogni $h = 1, \dots, r$). Allora $v_1, \dots, v_r$ sono linearmente indipendenti.

Dim. Per induzione su r $r=1$ $v_1 \neq 0$ OK.

Supp. $v_1, \dots, v_{r-1}$ lin. indep., e sia

$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_r v_r = 0$ applichiamo f ad ambo i membri

$$0 = f(0) = \alpha_1 f(v_1) + \dots + \alpha_r f(v_r) = \alpha_1 a_1 v_1 + \dots + \alpha_r a_r v_r$$

$$\alpha_r v_r = -\alpha_1 v_1 - \dots - \alpha_{r-1} v_{r-1} \quad \uparrow \text{ sostituisce qui}$$

$$\alpha_1 (a_1 - a_r) v_1 + \dots + \alpha_{r-1} (a_{r-1} - a_r) v_{r-1} = 0 \quad (\times)$$

$=: w_1 \qquad \qquad \qquad =: w_{r-1}$

Osserviamo che i vettori $w_1, \dots, w_{r-1}$ sono tutti $\neq 0$.

Inoltre:

$$\begin{aligned} f(w_h) &= f((a_h - a_r)v_h) = (a_h - a_r)f(v_h) = (a_h - a_r)a_h v_h = \\ &= a_h(a_h - a_r)v_h = a_h w_h \end{aligned}$$

Dunque $w_1, \dots, w_{r-1}$ sono autovettori per f , relativi agli autovalori $a_1, \dots, a_{r-1}$. Per l'ipotesi induttiva $w_1, \dots, w_{r-1}$ sono lin. indipendenti. Dunque (*) implica che $\lambda_1 = \dots = \lambda_{r-1} = 0$. Ma allora rimaniamo SPIEG.! con $\lambda_r v_r = 0$ e $v_r \neq 0 \Rightarrow \lambda_r = 0$. $\blacksquare$

$$E_h = \{v \in V \mid f(v) = a_h v\} \subset V \text{ sottosp. vett. } \forall h=1, \dots, r.$$

COROLLARIO

Siano $V, f, a_1, \dots, a_r$ come nella proposizione precedente. Se $v \in E_1 + \dots + E_r \subset V$, cioè $v = v_1 + \dots + v_r$ con $v_h \in E_h$ $\forall h$, allora tali v_h sono unici.

Dim.

Supponiamo che $v = v'_1 + \dots + v'_r$ con $v'_h \in E_h \forall h$.

Dalibrio, allora, provare che $v_h = v'_h \forall h$.

Per assurdo, qualche $v_h - v'_h$ sia $\neq 0$. È lecito supporre che siano i prim $s (\leq r)$ termini $v_h - v'_h$ ad essere $\neq 0$.

Allora

$$\underbrace{(v_1 - v'_1)}_{\in E_1} + \dots + \underbrace{(v_s - v'_s)}_{\in E_1} = v - v' = 0_v$$

Assurdo, per la proposizione precedente. Infatti } è una combinazione lineare nulla, con coefficienti tutti uguali ad $1 \neq 0_{\mathbb{R}}$. $\blacksquare$