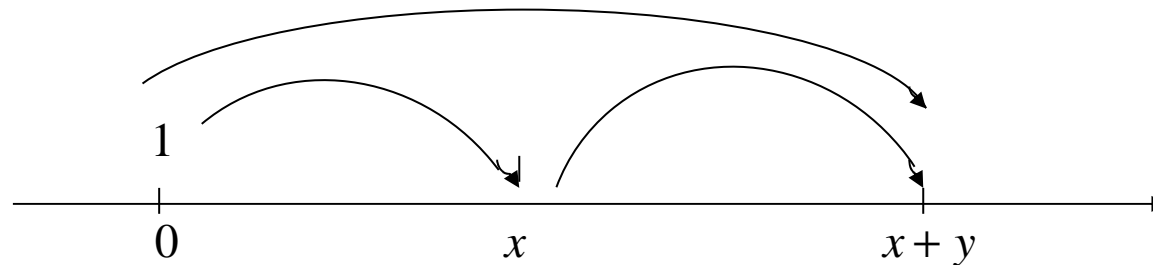


Proprietà di scindibilità

Supponiamo che si impieghi 1 euro all'istante 0 in base alla legge di capitalizzazione $f(t)$ e che ci siano due possibilità:

- 1) dopo x anni si ritira il montante $f(x)$ e lo si reinveste immediatamente, sempre in base alla legge di capitalizzazione $f(t)$, per ulteriori y anni; si ottiene così il montante $f(x)f(y)$
- 2) si ritira il montante dopo $x+y$ anni ottenendo $f(x+y)$



Ci si pone il problema se il montante ottenuto nei due casi sarà lo stesso oppure no.

Si definisce la seguente proprietà.

Si dice che **una legge di capitalizzazione è scindibile** se il montante che si ottiene interrompendo la capitalizzazione e riprendendola immediatamente alle stesse condizioni, cioè con la stessa legge di capitalizzazione, è lo stesso che si otterrebbe senza interruzione.

Quindi $f(t)$ è scindibile se

$$f(x)f(y) = f(x+y) \quad \forall x, y \geq 0$$

Si noti che è equivalente enunciare la proprietà di scindibilità in relazione alla legge di capitalizzazione oppure alla legge di attualizzazione, infatti:

$$\begin{aligned} f(t) \text{ è scindibile} &\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} f(x)f(y) = f(x+y) \quad \forall x, y \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{f(x)f(y)} = \frac{1}{f(x+y)} \quad \forall x, y \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \varphi(x)\varphi(y) = \varphi(x+y) \quad \forall x, y \geq 0 \end{aligned}$$

Quindi si può parlare semplicemente di legge finanziaria scindibile.

Proprietà delle leggi finanziarie

Si ha che la legge dell'interesse semplice

$$f(t) = 1 + i \cdot t$$

non è scindibile; infatti

$$f(x)f(y) = (1 + i \cdot x)(1 + i \cdot y) \neq (1 + i \cdot (x + y)) = f(x + y)$$

Invece, la legge della capitalizzazione composta

$$f(t) = (1 + i)^t$$

è scindibile; infatti

$$f(x)f(y) = (1 + i)^x (1 + i)^y = (1 + i)^{x+y} = f(x + y)$$

Vale il seguente risultato:

La legge di capitalizzazione composta è **l'unica legge di capitalizzazione** $f(t)$ **scindibile**

Esempio di applicazione della proprietà di scindibilità:

Calcolare il valore attuale di una rendita costituita da 8 rate annue di 2.000 euro ciascuna, con prima rata esigibile tra 3 anni e 4 mesi, al tasso annuo $i=0,025$.

Possiamo enunciare la seguente importante conseguenza della proprietà di scindibilità.

Con riferimento ad una operazione finanziaria

$$\mathbf{x} / \mathbf{t} = \{x_1, x_2, \dots, x_m\} / \{t_1, t_2, \dots, t_m\} \quad \text{con } t_1 < t_2 < \dots < t_m$$

Indicato con

$$W(t, \mathbf{x}) = \sum_{k=1}^m x_k (1+i)^{t-t_k}$$

il valore in t dell'operazione finanziaria \mathbf{x} / \mathbf{t} , per la proprietà di scindibilità si ha

$$W(T, \mathbf{x}) = W(t, \mathbf{x})(1+i)^{T-t} \quad \forall t, T$$