

OPERAZIONE FINANZIARIA EQUA

Con riferimento ad una operazione finanziaria

$$x/t = \{x_1, x_2, \dots, x_m\} / \{t_1, t_2, \dots, t_m\} \quad \text{con } t_1 < t_2 < \dots < t_m$$

si dice che x/t è **equa** nell'istante t se $W(t, x) = 0$

Per la proprietà di scindibilità della legge di capitalizzazione composta si ha:
se l'operazione finanziaria x/t è equa in t allora è equa anche in qualsiasi istante T .

Infatti, poiché

$$W(T, x) = W(t, x)(1+i)^{T-t} \quad \forall t, T$$

allora, se $W(t, x) = 0$ si ha che

$$W(T, x) = 0 \quad \forall T$$

Si dice quindi che l'operazione finanziaria x/t è **equa**, se $W(t, x) = 0$ in qualche istante t

La condizione

$$W(t, x) = 0$$

è detta **condizione di equità**.

Operazione finanziaria equa

La proprietà di scindibilità consente di risolvere in modo univoco i problemi di matematica finanziaria nell'impostazione della matematica finanziaria classica.

Infatti, un'operazione equa in un istante è equa in ogni altro istante, quindi la soluzione non cambia cambiando l'istante di valutazione in cui si pone la condizione di equità.

Esempio: $x/t = \{1000, -400, -x\}/\{0, 2, 5\}$ $i = 0,05$

Legge di capitalizzazione composta

$$W(0, x) = 0 \Leftrightarrow W(5, x) = 0$$

$$\Leftrightarrow X = 813,23$$

Legge dell'interesse semplice

$$1000(1 + 0,05 \cdot 5) - 400(1 + 0,05 \cdot 3) - X = 0$$

$$\Leftrightarrow X = 790$$

$$1000 - 400/(1 + 0,05 \cdot 2) - X/(1 + 0,05 \cdot 5) = 0$$

$$\Leftrightarrow X = 795,45$$

Osservazione sul significato di operazione finanziaria equa.

Premettiamo le definizioni di somma e di scomposizione di due operazioni finanziarie.

Si definisce **somma di due operazioni finanziarie**, l'operazione che ha come scadenziario l'unione degli scadenziari delle due operazioni finanziarie e come flusso di pagamenti quello ottenuto sommando algebricamente i pagamenti delle due operazioni finanziarie per ciascuna delle singole scadenze.

Si definisce la **scomposizione di una operazione finanziaria** in due operazioni finanziarie, se la somma delle due operazioni finanziarie è uguale all'operazione finanziaria data.

Per esempio si può scomporre una operazione finanziaria in due operazioni finanziarie, l'operazione attiva e quella passiva, considerando separatamente i flussi con segno positivo da quelli con segno negativo.

Operazione finanziaria equa

Consideriamo la scomposizione dell'operazione finanziaria x/t nell'operazione attiva a/t con i soli flussi positivi e nell'operazione passiva p/t con i soli flussi negativi.

Si ha

$$W(t, x) = W(t, a) + W(t, p)$$

Se l'operazione finanziaria x/t è equa, quindi è soddisfatta la condizione di equità

$$W(t, x) = 0$$

si ha

$$W(t, a) = -W(t, p)$$

quindi, il valore delle entrate prodotte dall'operazione finanziaria è uguale al valore delle uscite, cambiate di segno.

Ciò traduce l'idea di poste attive e passive che sono finanziariamente in equilibrio e la condizione

$$W(t, a) = -W(t, p)$$

è detta **equivalenza finanziaria** ed è una condizione equivalente alla condizione di equità.

Operazione finanziaria equa

Consideriamo l'operazione finanziaria

$$\mathbf{x} / \mathbf{t} = \{x_1, x_2, \dots, x_m\} / \{t_1, t_2, \dots, t_m\}$$

Sia t un istante in $[t_1, t_m]$, eventualmente coincidente con una delle scadenze t_1, t_2, \dots, t_m .

Si può considerare la scomposizione di \mathbf{x} / \mathbf{t} nelle due operazioni con, rispettivamente, le scadenze tutte precedenti o uguali a t da un lato, e quelle seguenti t dall'altro.

Si può allora scomporre il valore dell'operazione in t nei due addendi:

$$W(t, \mathbf{x}) = M(t, \mathbf{x}) + V(t, \mathbf{x})$$

dove
$$M(t, \mathbf{x}) = \sum_{k: t_k \leq t} x_k (1+i)^{t-t_k}$$

è detto **montante** in t dell'operazione finanziaria \mathbf{x} / \mathbf{t}

$$V(t, \mathbf{x}) = \sum_{k: t_k > t} x_k (1+i)^{-(t_k-t)}$$

è detto **valore residuo** in t dell'operazione finanziaria \mathbf{x} / \mathbf{t}

Se l'operazione finanziaria \mathbf{x} / \mathbf{t} è equa, si ha $W(t, \mathbf{x}) = 0$ e quindi

$$M(t, \mathbf{x}) = -V(t, \mathbf{x})$$

Esercizi

- 1) Un risparmiatore versò tre anni e quattro mesi fa, 1.700 euro in un deposito sul quale gli è stato riconosciuto il tasso annuo di interesse del 2,5%. Calcolare il montante.
- 2) Calcolare la somma da versare oggi in un deposito, sul quale è riconosciuto il tasso annuo del 2,7%, per potere disporre di 10.000 euro tra 4 anni e mezzo.
- 3) Calcolare la somma da versare oggi in un deposito, sul quale è riconosciuto il tasso annuo $i=0,03$, se si vogliono ritirare 7.000 euro tra 6 anni e 2 mesi e 4.000 euro tra 9 anni e 8 mesi.
- 4) In un deposito sul quale è riconosciuto il tasso annuo del 2% sono stati effettuati i seguenti prelievi e versamenti:

$$x / t = \{2.500, -1.000, 500, -1.200, 800\} / \left\{ 0, \frac{2}{12}, 1 + \frac{4}{12}, 2, 2 + \frac{6}{12} \right\}$$

Calcolare il saldo del deposito a 3 anni dal versamento iniziale.

- 5) Un risparmiatore versò in un deposito 3.000 euro 2 anni e mezzo fa e versa oggi altri 4.000 euro. Tra quanti anni potrà ritirare un montante di 10.000 euro, se sul deposito è applicato il tasso annuo del 3,5%?

Esercizi su operazioni di rendita

- 1) Calcolare la somma da versare oggi in un deposito per poter prelevare 250 euro alla fine di ogni mese nei prossimi tre anni, sapendo che la banca riconosce il tasso annuo dell'1,7%.
- 2) Si dispone oggi di 10.000 euro che vengono depositati in un fondo sul quale è riconosciuto il tasso annuo del 2,2%. Supponendo di iniziare a prelevare 10 mesi dopo il versamento iniziale delle rate semestrali costanti, calcolare l'ammontare della rata sapendo che in tutto saranno prelevate 8 rate.
- 3) Si versano 30.000 euro su un conto sul quale è riconosciuto il tasso annuo del 2,5%. Alla fine di ogni mese si prelevano 500 euro dal conto. Calcolare il numero massimo di prelievi. Calcolare inoltre la consistenza del fondo un mese dopo l'ultimo prelievo.
- 4) Si vogliono effettuare 19 versamenti trimestrali costanti a partire da oggi, per disporre di 40.000 euro sei mesi dopo l'ultimo versamento. Calcolare l'ammontare della rata sapendo che sul fondo è riconosciuto il tasso annuo del 3%.