

V spazio vettoriale, $\dim(V) = n$. $f: V \rightarrow V$ endomorfismo.

B base di V $M_B^B(f) = A$ $f: \underset{B}{V} \longrightarrow \underset{B}{V}$

Se $\mathcal{C}$ è un'altra base di V , e se $B = M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(f)$ allora $B = P^{-1}AP$ con P matrice $n \times n$ invertibile "A e B son m. simili".

PROBLEMA Trovare una base $\mathcal{C}$ di V rispetto alla quale $P^{-1}AP$ sia la più "semplice" possibile.

Che cosa significa "semplice"? Proponiamo la

Def. Una matrice quadrata $D = (d_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$ si dice diagonale se $i \neq j \Rightarrow d_{ij} = 0$.

$D = \begin{pmatrix} d_{11} & & \\ & d_{22} & \\ & & \ddots \\ & & & d_{nn} \end{pmatrix}$ dove non c'è scritto niente si intende che son tutt'zeri. Cioè D può avere entrate $\neq 0$ sol sulla diagonale principale.

ESEMPLI la matrice nulla, I_n , le m. elementari $M_{c,i}$ $c \in \mathbb{R}, c \neq 0$

OSSERVAZIONE Vedremo con esempi che non è sempre possibile trovare una base $\mathcal{C}$ di V in mod che $P^{-1}AP$ sia diagonale.

Supponiamo che esista una matrice $n \times n$ P invertibile, t.c. $P^{-1}AP$ sia diagonale

$$D = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \underbrace{a_1 \dots a_1}_{m_1} & & \\ & \underbrace{a_2 \dots a_2}_{m_2} & \\ & & \ddots \\ & & & \underbrace{a_r \dots a_r}_{m_r} \end{pmatrix} \quad (1)$$

in realtà, questo polin. dipende da f

$$\text{Allora } p_{\lambda}(x) = p_B(x) = \pm (a_1 - x)^{m_1} \dots (a_r - x)^{m_r}$$

con

$$m_1 + m_2 + \dots + m_r = n$$

PROPOSIZIONE

Quindi, se esiste una matrice invertibile P tale che $P^{-1}AP$ sia m. diagonale, allora deve essere possibile scomporre il polinomio caratteristico $p_A(\lambda)$ come in (1). questa è una condiz. che possiamo controllare a priori, a partire da A

In tal caso si dice che $p_A(\lambda)$ "ha tutte le sue radici in $\mathbb{R}$ ".

Si osserva che non basta conoscere le radici di $p_A(\lambda)$, bisogna conoscere anche le loro molteplicità algebriche.

ESEMPIO

$p = (1-\lambda)(2-\lambda)^2$ $q = (1-\lambda)^2(2-\lambda)$ son polinomi con le stesse radici, ma diversi tra loro.

Si osserva anche che (1) indica che $p_A(\lambda)$ si scompone nel prodotto di n fattori di grado 1 nell'indeterminata " λ " (“lineari”)

$a_h - \lambda = -\lambda + a_h$

non non

Pensiamo P come matrice di cambiamento di base

$$P = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(\text{id}_V)$$

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{B} & & \mathcal{B} \\ V & \xrightarrow{f} & V \\ \uparrow \text{id}_V & & \downarrow \text{id}_V \\ \mathcal{C} & & \mathcal{C} \\ V & \xrightarrow{f} & V \end{array}$$

A P^{-1}
 D

$$\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_m)$$

$$\mathcal{C} = (u_1, \dots, u_m)$$

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & & \\ & \ddots & \\ & & p_{mm} \\ \hline & & & -u_h & u_m \end{pmatrix} \begin{matrix} v_1 \\ \vdots \\ v_m \end{matrix}$$

Se $d_{hh} = a_h$, allora $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(f) = D$

ci dice che

$$\boxed{f(u_h) = a_h u_h}$$

$u_h \neq 0$ sicuramente, perché è vettore di una base, dunque è linearmente indipendente. Pertanto

u_h è autovettore per f (relativo all'autovalore a_h) $\forall h = 1, \dots, m$

Abbiamo così dimostrato la

PROPOSIZIONE

Se esiste una matrice invertibile P tale che $P^{-1}AP$ sia m. diagonale, allora esiste una base di V tutta costituita da

autovettori per f . E viceversa (il viceversa è banale).

Possiamo precisare meglio questa condizione.

La matrice D ci dice che i vettori $u_1, \dots, u_{m_i}$ sono tutti autovettori relativi all'autovalore a_i .

Ma $u_1, \dots, u_{m_i}$ sono lin. indep., perché fanno parte di una base di V . Dunque

$$m_i \leq \dim(E_{a_i}) = m_g(a_i) \leq m_{alg}(a_i) = m_i \Rightarrow m_g(a_i) = m_{alg}(a_i) = m_i$$

In conclusione, si ha la $\uparrow$ [Questo ragionamento vale per ogni autovalore

PROPOSIZIONE

"Se esiste una matrice invertibile P tale che $P^{-1}AP$ sia in diagonale" ($\stackrel{\text{def}}{=} A$ è diagonalizzabile), allora (oltre alla condizione (1)) vale che

(2) per ogni autovalore a di f si ha che $m_g(a) = m_{alg}(a)$.

Ci sono casi in cui vale la cond. (1), ma non vale la (2). Altri in cui vale la (2), ma non la (1).

PROPOSIZIONE

Sia $f: V \rightarrow V$ un endomorfismo, e sia $A = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$, $\mathcal{B}$ base di V . Supponiamo che valgano entrambe le condizioni (1) e (2). Allora f è diagonalizzabile.

Dim.

Siano $a_1, \dots, a_r$ gli autovalori di f , ed $m_1, \dots, m_r$ le rispettive molteplicità (geom = alg per ipotesi). Siano

$w_1, \dots, w_{m_1}$ base di E_1

$w_{m_1+1}, \dots, w_{m_1+m_2}$ base di E_2

...

$w_{m_1+\dots+m_{r-1}+1}, \dots, w_n$ base di E_r

$$m_1 + m_2 + \dots + m_r = n = \dim(V)$$

Se provi che $w_1, \dots, w_n$ sono lin. indipendenti

ho trovato una base di V tutta costituita da autovettori.
In tal caso la proposizione è dimostrata.

Sia, quindi:

$$\underbrace{\lambda_1 w_1 + \dots + \lambda_{m_1} w_{m_1}}_{\stackrel{\text{def}}{=} N_1 \in E_{\alpha_1}} + \underbrace{\lambda_{m_1+1} w_{m_1+1} + \dots + \lambda_{m_1+m_2} w_{m_1+m_2}}_{\stackrel{\text{def}}{=} N_2 \in E_{\alpha_2}} + \dots = 0_V \quad (*)$$

(DIMENTICARSI della base B di V ...), Alziamo la situazione

$$N := N_1 + N_2 + \dots + N_r \in E_1 + E_2 + \dots + E_r \subset V \quad N_h \in E_{\alpha_h} \quad \forall h$$

In tal caso tali N_h sono unici

Infatti, sia anche $N = N_1' + \dots + N_r'$ con $N_h' \in E_{\alpha_h} \quad \forall h$.

Allora è da provare che $N_1 = N_1'$, $N_2 = N_2'$, ..., $N_r = N_r'$.

Per assurdo, esista h tale che $N_h \neq N_h'$. È lecito supporre che gli h per cui $N_h \neq N_h'$ siano i primi s ($s \leq r$).

Dunque si ha

$$\underbrace{(N_1 - N_1') + \dots + (N_s - N_s')}_{\substack{\neq 0 \\ \in E_1}} = N - N' = 0_V \quad \underbrace{\qquad}_{\in E_s}$$

Ma abbiamo dimostrato la lezione scorsa che $N_1 - N_1'$, ..., $N_s - N_s'$ sono linearmente indipendenti. Quindi la relazione qui sopra è assurda.

Pertanto, da (*) segue SPIEGARE:

$$\lambda_1 w_1 + \dots + \lambda_{m_1} w_{m_1} = 0_V \Rightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_{m_1} = 0 \quad \text{perché } w_1, \dots, w_{m_1} \text{ sono linearmente indipendenti}$$

$$\lambda_{m_1+1} w_{m_1+1} + \dots + \lambda_{m_1+m_2} w_{m_1+m_2} = 0_V \Rightarrow \lambda_{m_1+1} = \dots = \lambda_{m_1+m_2} = 0 \quad \text{perché } w_{m_1+1}, \dots, w_{m_1+m_2} \text{ sono linearmente indipendenti.}$$

Procedendo così si prova che ogni " λ " in $(\mathbb{A})$ è $= 0_{\mathbb{R}}$.

COROLLARIO

$f: V \rightarrow V$ endomorfismo, A come nella prop. precedente.

Supponiamo $p_f(\lambda) = \pm (\lambda - a_1) \cdots (\lambda - a_n)$, dove $i \neq j \Rightarrow a_i \neq a_j$. Allora f è diagonalizzabile.

Dim.

È chiaro che la condizione (1) è soddisfatta. Inoltre a_i autovale per $f \Rightarrow \cancel{\text{...}} 1 \leq \dim(E_{a_i}) = m_g(a_i) \leq m_{alg}(a_i) = 1$. Quindi anche la condizione (2) è soddisfatta.

ESEMPIO 1 $V = \mathbb{R}^2$ $f = L_A$ $A = \begin{vmatrix} -5 & -9 \\ 4 & 7 \end{vmatrix}$

$p_f(\lambda) = (\lambda - 1)^2$ vale la (1). Ma $m_g(1) = 1 < 2 = m_{alg}(1)$, quindi non vale la (2).

ESEMPIO 2 $V = \mathbb{R}^3$ $f = L_A$ $A = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ $p_f(\lambda) = (1 - \lambda)(\lambda^2 + 1)$

L'unico autovale di f è $\lambda = 1$ $m_{alg}(1) = 1 \Rightarrow m_g(1) = m_{alg}(1)$ e la condizione (2) è soddisfatta.

Ma la condizione (1) non è soddisfatta perché $\lambda^2 + 1 = 0$ non ha radici reali.

ESEMPIO 3 $V = \mathbb{R}^3$ $f = L_A$ $A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 4 \end{vmatrix}$ $p_f(\lambda) = -(\lambda - 1)(\lambda - 3)^2$

f è diagonalizzabile?

La condizione (1) è soddisfatta.

$m_g(1) \leq m_{alg}(1) = 1 \Rightarrow m_g(1) = m_{alg}(1) = 1$

$\text{rg}(A - 3I_3) = \text{rg} \begin{vmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \Rightarrow$ la dimensione dello spazio delle soluzioni di $(A - 3I_3)X = 0$ è $3 - 1 = 2$. Cioè

$2 = m_g(3) \leq m_{alg}(3) = 2 \Rightarrow m_g(3) = m_{alg}(3)$

Vali anche la condizione (2), dunque f è diagonalizzabile. Osserviamo che la matrice D diagonale, simile ad A è univocamente determinata:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & & \\ & 3 & \\ & & 3 \end{vmatrix}$$

È interessante chiedersi chi è ^{la} matrice P .
 $\uparrow$
SPLCG.

$$(A - 3I_3) \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

equival a

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{cioè}$$

a $\boxed{x_1 - x_2 - x_3 = 0}$ considero x_2, x_3 come param. liberi.

Una base dello spazio di soluzioni di $\bar{E}$ è, allora

$$\begin{array}{c|c|c} x_2 & x_3 & x_1 \\ \hline 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}$$

li scelgo $\wedge$ lo calcolo

Quindi una base di E_3 è

$$u_2 = \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix} \quad u_3 = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}$$

$$A - 1 \cdot I_3 = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 3 \end{vmatrix} \quad \left. \vphantom{\begin{vmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 3 \end{vmatrix}} \right\} \text{lin. indep.}$$

La prima riga è la somma delle altre due. Dunque

$$\text{rg}(A - I_3) = 2 \quad (A - I_3)X = 0 \quad \text{equivalente a} \quad \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -3 \end{vmatrix} \rightsquigarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & -2 \end{vmatrix} \rightsquigarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \rightsquigarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Considero x_3 come param. libero. Scelgo $x_3 = 1$ e trovo

$$u_1 = \begin{vmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{vmatrix}$$

Quindi una base di $\mathbb{R}^3$ tutta formata da autovettori di f è $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3)$, dove

$$u_1 = \begin{vmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{vmatrix} \quad u_2 = \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix} \quad u_3 = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}$$

La matrice P è, allora

$$P = M_{B_c}^B(id_{\mathbb{R}^3}) = \begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & e_1 \\ -1 & 1 & 0 & e_2 \\ 1 & 0 & 1 & e_3 \\ \hline u_1 & u_2 & u_3 & \\ u & u & u & \\ id(u_1) & id(u_2) & \vdots & \end{array}$$

EXE Calcolare P^{-1}

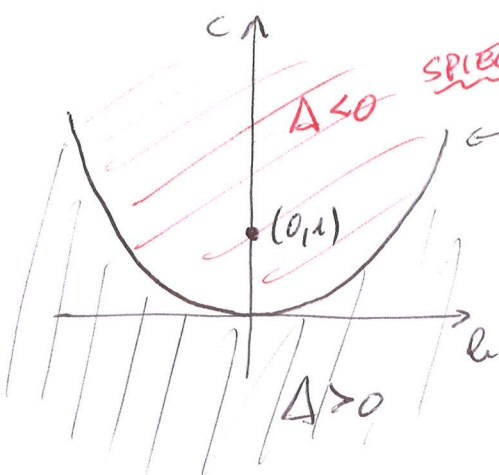
è consigliabile, poi,
fare tutte le verifiche.

OSSERVAZIONE

Il "collasso" (a pag. 5) è stato presentato come un caso particolare. In realtà, se vale la (1), è quello che succede nel 99,99% dei casi.

Spieghiamoci esaminando il caso $n=2$

$$p_f(\lambda) = \lambda^2 + b\lambda + c \quad b, c \in \mathbb{R} \quad \Delta = b^2 - 4c$$



parabola $c = -\frac{1}{4}b^2$ cioè $\Delta = 0$

ci vuole proprio una "sfortuna nera" per capitare in un punto della parabola...